

# Bernstein 型問題の最近の進展について

川上 裕 (Yu KAWAKAMI)

金沢大学理工研究域数物科学系

2021 年 3 月 13 日 : 大阪市立大学幾何学講演会

## 本講演の目的

グラフ曲面の Bernstein 型問題の最近の研究結果の紹介

### ① Part 1 : Euclid 空間のグラフ曲面の話

- $\mathbf{R}^3$  の極小グラフに対する Bernstein の定理の証明の歴史
- $\mathbf{R}^4$  の極小グラフに対する Bernstein 型の定理
- $\mathbf{R}^3$  の平均曲率一定グラフに対する Bernstein 型の定理

### ② Part 2 : Lorentz-Minkowski 空間のグラフ曲面の話

- $\mathbf{R}_1^3$  の空間的極大グラフに対する Calabi-Bernstein の定理
- $\mathbf{R}_1^3$  の空間的平均曲率一定グラフに対する Bernstein 型の定理

# Part 1 : Euclid 空間のグラフ曲面の話

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$  領域

$X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$   $C^r$  級はめ込み ( $r \geq 2$ )

## Definition

曲面  $X(\Omega)$  の平均曲率が恒等的に 0 となるとき、その曲面を **極小曲面** (minimal surface) と呼ぶ。

非径数表示 (non-parametric form)

$$X(x, y) = (x, y, f_3(x, y), \dots, f_n(x, y)), \quad f_k(x, y) \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$$

のとき、この曲面が極小曲面であるための条件は次のようになる：

$$\left(1 + \sum_{r=3}^n \left(\frac{\partial f_r}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} - 2 \sum_{r=3}^n \left(\frac{\partial f_r}{\partial x} \frac{\partial f_r}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial y} + \left(1 + \sum_{r=3}^n \left(\frac{\partial f_r}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

(1) を **極小曲面方程式系** (system of minimal surface equations) と呼ぶ。

# $\mathbf{R}^3$ における極小曲面方程式

$n = 3$  のとき,  $f_3(x, y)$  を  $\Phi(x, y)$  とすると, (1) は

$$(1 + \Phi_y^2)\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + (1 + \Phi_x^2)\Phi_{yy} = 0 \quad (2)$$

と 2 階の非線形楕円型偏微分方程式となる.

**Note:** 極小曲面方程式 (2) は,  $\Phi$  の勾配  $\nabla\Phi := (\Phi_x, \Phi_y)$  を使って

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla\Phi|^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_x}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi_y}{W}\right) = 0 \quad (3)$$

( $W := \sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}$ ) と発散を用いた方程式で表すことができる.

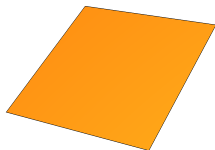
関数  $\Phi$  のグラフ

$$\Gamma_\Phi := \{(x, y, \Phi(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$$

# 極小曲面方程式を満たす例

- 平面 (**plane**) (自明な例)

$$\Omega = \mathbf{R}^2, \Phi(x, y) = ax + by + c \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$



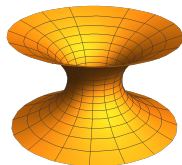
- 常螺旋面 (**helicoid**) (線織面かつ極小曲面となる唯一の例)

$$\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0), \Phi(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$



# 極小曲面方程式を満たす例と Bernstein の定理

- 懸垂面 (**catenoid**) (回転面かつ極小曲面となる唯一の例)  
 $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $\Phi(x, y) = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$



## Theorem (Bernstein の定理)

$\mathbf{R}^2$  全体で定義される極小曲面の方程式 (2) の解は、  
自明な解 (ここでは,  $x, y$  の 1 次式のこと) のみである。

**Note:** 上の主張を幾何学的に述べると、  
“ $\mathbf{R}^2$  全体で定義される極小グラフは平面のみである” となる。

# S. N. Bernstein による証明について (1)

## Serge Natanovich Bernstein (1880~1968)

- パリ大学で学位取得。C. E. Picard に師事。
- 学位論文で、楕円型偏微分方程式の問題である Hilbert の第 19 問題を解く (1904 年)。
- 専門は楕円型偏微分方程式，確率論，構成的関数論。

## S. N. Bernstein による Bernstein の定理の論文

- S. Bernstein, Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov (2éme sér.) **15**, 38–45 (1915–1917).
- S. Bernstein, Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Math. Z. **26** (1927), 551–558. (上の論文のドイツ語訳)

## S. N. Bernstein による証明について (2)

S. N. Bernstein は、以下の定理の系として Bernstein の定理を導いた。

Theorem (Liouville の定理の一般化, Bernstein (1915))

関数  $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$  が次の条件を満たすものとする：

$$\begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix} \text{ が各 } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ で正定値である.}$$

関数  $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  を

$$\begin{cases} a(x, y)f_{xx} + 2b(x, y)f_{xy} + c(x, y)f_{yy} = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \\ f(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2}) & \text{as } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4)$$

の解とする。このとき、 $f$  は定数関数となる。

**Note:**  $a = c \equiv 1, b \equiv 0$  で  $f$  の有界性を仮定すれば、上の定理は調和関数に対する Liouville の定理となる。



## S. N. Bernstein による証明について (3)

先の定理を用いて, Bernstein の定理を証明する.

Proof.

極小曲面方程式 (2) の任意の解は実解析である. また, (2) から,

$$\varphi_1 = \arctan(\Phi_x), \quad \varphi_2 = \arctan(\Phi_y)$$

は次の偏微分方程式の  $\mathbf{R}^2$  上の有界な解となる :

$$(1 + (\Phi_y)^2)(\varphi_i)_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y(\varphi_i)_{xy} + (1 + (\Phi_x)^2)(\varphi_i)_{yy} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

そこで,

$$a(x, y) = 1 + (\Phi_y)^2, \quad b(x, y) = -\Phi_x\Phi_y, \quad c(x, y) = 1 + (\Phi_x)^2$$

として, 先の定理を適用することで,  $\nabla\Phi = (\Phi_x, \Phi_y)$  は定数である.  
(4) における無限遠の挙動の仮定から,  $\Phi$  は  $x, y$  の 1 次式となる. □

## S. N. Bernstein による証明について (4)

Liouville の定理の一般化の結果の証明は次の通りである：  
楕円型の条件 (4) から，

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2$$

で，等号が成り立つのは  $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$  となる点である。

Lemma (Bernstein (Gap 有) ; Hopf, Mickle (1950))

$f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  とする。  $\mathbf{R}^2$  上で  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0$  (つまり  $\Gamma_f$  の Gauss 曲率  $K$  が  $K \leq 0$ ) で，  $\mathbf{R}^2$  のある点で  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$  (つまり  $K < 0$ ) となるとき，  $f$  は “ $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$  のとき  $o(\sqrt{x^2 + y^2})$  となる” ことはない。

上の補題と条件 (4) から，  $\mathbf{R}^2$  上で  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \equiv 0$  となり，

$$f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} = 0$$

となるので，  $f$  は  $x, y$  の 1 次式となる。

さらに無限遠の条件から  $f$  は定数関数となる。 □

# J. C. C. Nitsche の証明について (1)

## Ref.

- K. Jörgens, Über die Lösungen der Differentialgleichung  $rt - s^2 = 1$ , Math. Ann. **127** (1954), 130–134.
- J. C. C. Nitsche, Elementary proof on Bernstein's theorem on minimal surfaces, Ann. of Math. **66** (1957), 543–544.

## 日本語で読める文献

- 増田久弥, 非線型楕円型偏微分方程式, 岩波基礎数学 解析学 (II) vi, 岩波書店, 2019 年.
- 川上裕・藤森祥一, 極小曲面論入門, SGC ライブラリ 147, サイエンス社, 2019 年.

## J. C. C. Nitsche の証明について (2)

### Nitsche による証明のポイント

この証明の方針はもともと Jörgens の論文に記されている。

- 以下の Jörgens の定理の証明 (Nitsche は簡潔な別証明を与えた)
- 極小曲面方程式 (2) を Monge-Ampère 方程式 (5) に帰着させる (E. Heinz による考察, 極小曲面における等温座標系の存在証明の際に現れる偏微分方程式系を利用)

### Theorem (K. Jörgens, 1954)

$f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  を

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 1 \quad (5)$$

の解とする。このとき,  $f(x, y)$  は  $x, y$  の 2 次式となる。

Jörgens の定理の証明は, 日本語で読める文献 (増田, 川上・藤森) を参照してほしい。

## Jörgens の定理を用いた Bernstein の定理の証明

$\Phi$  が極小曲面の方程式 (2) を満たすとき,  $W = \sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}$  とおくと

$$\omega_1 = \frac{1 + \Phi_x^2}{W} dx + \frac{\Phi_x \Phi_y}{W} dy, \quad \omega_2 = \frac{\Phi_x \Phi_y}{W} dx + \frac{1 + \Phi_y^2}{W} dy$$

が閉形式となる. Poincaré の補題から

$\xi(x, y), \eta(x, y) \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  s.t.  $d\xi = \omega_1, d\eta = \omega_2$ .

さらに,  $\omega_3 = \xi(x, y) dx + \eta(x, y) dy$  は閉形式, Poincaré の補題から,  $\varphi(x, y) \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  s.t.  $d\varphi = \omega_3$ . よって,

$$\varphi_{xx} = \frac{1 + \Phi_x^2}{\sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}}, \quad \varphi_{xy} = \frac{\Phi_x \Phi_y}{\sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}}, \quad \varphi_{yy} = \frac{1 + \Phi_y^2}{\sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}}$$

となり, この  $\varphi$  は Monge-Ampère 方程式 (5) を満たす.

よって, Jörgens の定理より  $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$  はすべて定数となるので,  $\Phi_x, \Phi_y$  も定数となる. □

## R. Osserman による証明 (1)

**Ref.**  
R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Second edition, Dover Publications, Inc., 1986.

非径数表示 (non-parametric form)

$$X(x, y) = (x, y, f_3(x, y), \dots, f_n(x, y)), \quad f_k(x, y) \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$$

に対して,  $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n-2}$  を

$$F(x, y) := (f_3(x, y), \dots, f_n(x, y))$$

で定め,  $F$  によって定まる  $\mathbf{R}^n$  のグラフ曲面を

$$\Gamma_F = \{(x, y, f_3(x, y), \dots, f_n(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

とする.

## Osserman による証明 (2)

### Theorem (Osserman, 1966)

$F(x, y)$  が  $\mathbf{R}^2$  全体で定義される極小曲面方程式系 (1) の解とする。  
このとき、実数  $a$  と正の数  $b > 0$  と非特異線形変換

$$x = u, \quad y = au + bv$$

が存在し、 $(u, v)$  が  $\Gamma_F$  の大域的な等温座標系となる。

### Theorem

$\Phi(x, y) \in C^1(\Omega, \mathbf{R})$  とする。  $\Phi$  のグラフ  $\Gamma_\Phi$  が平面となるためには、非特異線形変換  $(u, v) \mapsto (x, y)$  で  $(u, v)$  が  $\Gamma_\Phi$  の等温座標系となるものが存在することが必要十分である。

- 上の2つの定理を組み合わせることで Bernstein の定理が示せる。
- Osserman の定理の証明は Nitsche の証明の議論が本質的に使われている。

# $\mathbf{R}^4$ の極小グラフについて (1)

非径数表示 (non-parametric form)

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y), g(x, y)), \quad f(x, y), g(x, y) \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$$

に対して,  $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  を

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

で定め,  $F$  によって定まる  $\mathbf{R}^4$  のグラフ曲面を

$$\Gamma_F = \{(x, y, f(x, y), g(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

とする.

極小曲面方程式系は

$$\begin{cases} (1 + f_y^2 + g_y^2)f_{xx} - 2(f_x f_y + g_x g_y)f_{xy} + (1 + f_x^2 + g_x^2)f_{yy} = 0 \\ (1 + f_y^2 + g_y^2)g_{xx} - 2(f_x f_y + g_x g_y)g_{xy} + (1 + f_x^2 + g_x^2)g_{yy} = 0 \end{cases} \quad (6)$$



## $\mathbf{R}^4$ の極小グラフについて (2)

$\mathbf{R}^2$  上定義される  $\mathbf{R}^4$  の極小グラフは平面だけではない。

- 複素解析的曲線 (complex analytic curve)

$F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  を,  $f(x, y) + ig(x, y)$  が正則もしくは反正則関数とする. Cauchy-Riemann の方程式から,  $F = (f, g)$  が極小曲面方程式系を満たすことがわかる. この極小グラフ  $\Gamma_F$  を複素解析的曲線という.

- Osserman による複素解析的曲線でない例

$F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  を,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(e^x - 3e^{-x}) \cos \frac{y}{2}, \quad g(x, y) = \frac{1}{2}(e^x - 3e^{-x}) \sin \frac{y}{2} \quad (7)$$

とおくと,  $F = (f, g)$  は極小曲面方程式系を満たす.

### 問題

$\mathbf{R}^2$  全体で定義された  $\mathbf{R}^4$  の極小グラフで複素解析的曲線であるための幾何学的条件とは何か?

# $\mathbb{R}^4$ の極小グラフのヤコビアン (1)

## Ref.

Th. Hasanis, A. Savas-Halilaj, Th. Vlachos, On the Jacobian of minimal graphs in  $\mathbb{R}^4$ , Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), 321-327.

$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  に対して,  $F$  の Jacobian を

$$J_F = f_x g_y - f_y g_x$$

で定める.

## Theorem (Hasanis, Savas-Halilaj, Vlachos, 2011)

$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

$\Gamma_F$  は  $\mathbb{R}^4$  の極小グラフで, 平面でないとする.

このとき,  $\Gamma_F$  が複素解析的曲線となるためには,  $F$  の Jacobian  $J_F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  がすべての実数を値として取らないことが必要十分である. 特に,  $\Gamma_F$  が複素解析的曲線のとき,  $J_F$  は次の値を取る.

- $[0, +\infty)$  か  $(0, +\infty)$  のすべての値 ( $f + ig$  が正則関数のとき),
- $(-\infty, 0)$  か  $(-\infty, 0]$  のすべての値 ( $f + ig$  が反正則関数のとき).

## $\mathbf{R}^4$ の極小グラフのヤコビアン (2)

Corollary (Hasanis, Savas-Halilaj, Vlachos, 2009)

$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ .

$\Gamma_F$  は  $\mathbf{R}^4$  の極小グラフとする.

$F$  の Jacobian  $J_F$  が有界ならば,  $\Gamma_F$  は平面である.

$\Gamma_F$  が複素解析的曲線でない場合,

$J_F$  がすべての実数値を取る例が存在する.

実際, Osserman による複素解析的曲線でない例の Jacobian を計算すると

$$J_F = -\frac{e^{2x} - 9e^{-2x}}{8}$$

となり, すべての実数値を取る.

# $\mathbf{R}^4$ の極小グラフのヤコビアン の証明について (1)

$\Gamma_F$  を  $\mathbf{R}^2$  全体で定義される  $\mathbf{R}^4$  の極小グラフとする.  
Osserman の大域的等温座標系  $(u, v)$  の存在定理より,  
非特異線形変換 (ただし,  $a, b > 0$  は実数)

$$x = u, \quad y = au + bv$$

が存在する. よって,  $\Gamma_F$  は

$$X(u, v) = (u, au + bv, \varphi(u, v), \psi(u, v))$$

でパラメータ付けられる. ここで

$$\varphi(u, v) := f(u, au + bv), \quad \psi(u, v) := g(u, au + bv).$$

## $\mathbf{R}^4$ の極小グラフのヤコビアン の証明について (2)

$\Xi = (\varphi, \psi)$  とおく. Jacobian に関する関係式

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

より,

$$J_{\Xi} = bJ_F$$

を得る.  $(u, v)$  は等温座標系で,  $\Gamma_F$  は極小曲面なので,  $\varphi, \psi$  は調和関数となる. よって,

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0, \quad \psi_{uu} + \psi_{vv} = 0$$

が成り立つ. このとき, 複素数値関数  $\phi_k: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) を

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = a - ib, \quad \phi_3 = \varphi_u - i\varphi_v, \quad \phi_4 = \psi_u - i\psi_v$$

とすると,  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = 0$  となる.

# $\mathbb{R}^4$ の極小グラフのヤコビアン の証明について (3)

## 定理の証明の概要

$J_F$  がすべての実数を値として取らないとしたとき,  $\Gamma_F$  が複素解析的曲線になることを示す. 先ほどの方程式から

$$(\phi_3 + i\phi_4)(\phi_3 - i\phi_4) = -d, \quad d = 1 + (a - ib)^2 \quad (8)$$

となる.  $J_F$  がすべての実数値を値として取らないとき,  $d = 0$  となる. よって,  $a = 0, b = 1$  となり,  $(x, y)$  も等温座標であることがわかる. また, (8) より,  $\phi_3 = \pm i\phi_4$ , つまり

$$f_x - if_y = \pm i(g_x - ig_y)$$

となる. Cauchy-Riemann の方程式より,  $f(x, y) + ig(x, y)$  は正則または反正則関数となり,  $\Gamma_F$  は複素解析的曲線となる.

## $\mathbb{R}^4$ の極小グラフのヤコビアン の証明について (4)

逆に,  $\Gamma_F$  が平面でない複素解析的曲線とする.

$h(x, y) = f(x, y) + ig(x, y)$  は正則または反正則関数である.

$$J_F = |h_z|^2 - |h_{\bar{z}}|^2$$

が成り立つので,  $h$  が正則のとき  $J_F \geq 0$ ,  $f$  が反正則のとき  $J_F \leq 0$  となる. いずれも  $J_F$  はすべての実数を値として取らない.

$h(x, y)$  が正則関数となるとき,  $J_F = |h_z|^2$  で,  $h_z$  は  $\mathbb{C}$  上の正則関数.  $h_z$  が定数なら  $\Gamma_F$  は平面となるので,  $h_z$  は定数ではない.

Picard の小定理から,  $h_z$  の値域は  $\mathbb{C}$  全体か  $\mathbb{C}$  から 1 点を除いたもの. よって,  $J_F$  は  $(0, +\infty)$  または  $[0, +\infty)$  となる.

同様に,  $h(x, y)$  が反正則関数なら  $J_F$  は  $(-\infty, 0)$  または  $(-\infty, 0]$  となる.

□

# Bernstein 型定理への応用 (1)

## Theorem (Schoen, 1993)

$F = (f, g): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  を極小曲面方程式系の解とする。  
もし  $F$  が微分同相写像ならば,  $F$  は affine 写像である。

## Proof.

$F$  は微分同相写像より,  $F$  が向きを保つ場合は  $J_F > 0$ ,  
 $F$  が向きを逆向きにするときは  $J_F < 0$  が成り立つ。

Jacobian の結果から,  $F$  は  $\mathbf{R}^2$  全体で定まる等角微分同相写像となる。  
複素解析の正則 (反正則) 自己同型写像に関する基本的な結果から,  
 $F$  は affine 写像となる。 □



## Bernstein 型定理への応用 (2)

### Theorem (Fu, 1988)

$\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  を Special Lagrangian 方程式

$$\cos \theta(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - \sin \theta(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 - 1) = 0$$

( $\theta$  は実定数) を満たすとき,  $\varphi$  は調和関数もしくは  $x, y$  の 2 次式となる.

### 証明

$F := \nabla \varphi = (\varphi_x, \varphi_y): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  とする.  $\varphi$  は Special Lagrangian 方程式を満たすので, Harvey-Lawson の結果から,  $F$  のグラフは  $\mathbf{R}^4$  の極小曲面となる. このとき,

$$J_F = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2.$$

まず,  $J_F(x_0, y_0) = 1$  となる  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$  が存在したとすると, その点で  $\varphi_{xx}(x_0, y_0) + \varphi_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$  より,  $\theta = \pi/2$ ,  $J_F = 1$  となる. Jacobian の結果から  $F$  は affine 写像で,  $\varphi$  は  $x, y$  の 2 次式となる.

# Bernstein 型定理への応用 (3)

## 証明の続き

$J_F \neq 1$  とする. このとき,  $J_F > 1$  か  $J_F < 1$  となる.

- $J_F > 1$  のとき, Jacobian の結果から,  $F$  は affine 写像となり,  $\varphi$  は  $x, y$  の 2 次式となる.
- $J_F < 1$  のとき, Jacobian の結果から,  $J_F \leq 0$  となり,  $\varphi_x + i\varphi_y$  は 反正則関数となる. Cauchy-Riemann の方程式から,  $\varphi$  は調和関数となる.

□

**Note:** Fu の結果の証明については, Hoojoo Lee 氏の Jörgens の定理を用いたとても簡単な証明が知られている.

H. Lee, A one-sentence proof of the Bernstein type theorem for special Lagrangian equation in two dimensions, arXiv: 1712.01692.

# $\mathbf{R}^3$ の CMC グラフに対する Bernstein 型の定理 (1)

**Ref.**  
剣持勝衛, 曲面論講義 平均曲率一定曲面入門, 培風館, 2000 年.

関数  $\Phi$  のグラフ  $\Gamma_\Phi := \{(x, y, \Phi(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$  の平均曲率  $H$

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \Phi}{\sqrt{1 + |\nabla \Phi|^2}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Phi_x}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\Phi_y}{W} \right) \right\}$$

(ただし,  $W := \sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}$ ) と発散形で表すことができる.

Corollary (CMC グラフに対する Bernstein 型定理)

$\mathbf{R}^2$  全体で定義される  $\mathbf{R}^3$  の平均曲率一定グラフは平面のみである.

## $\mathbf{R}^3$ の CMC グラフに対する Bernstein 型の定理 (2)

### Theorem (Heinz, 1955)

$\Delta_R \subset \mathbf{R}^2$  : 原点中心半径  $R$  の開円板,  $\Phi \in C^2(\Delta_R, \mathbf{R})$   
 $\Gamma_\Phi$  の平均曲率  $H$  が, ある正の数  $\alpha$  に対して,  $\Delta_R$  上で

$$|H| \geq \alpha > 0$$

を満たすならば,

$$\alpha \leq \frac{1}{R}$$

が成り立つ.

### Proof.

Heinz の定理から,  $|H| \leq R^{-1}$  が成り立つので,  $R \rightarrow +\infty$  とすると  $H \equiv 0$  となり, Bernstein の定理から主張を得る. □

# Heinz の定理の証明

$0 < R_1 < R$  を満たす任意の  $R_1$  を取る. Green の定理より

$$\iint_{\Delta_R} 2H \, dx dy = \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left( -\frac{\Phi_y}{W} dx + \frac{\Phi_x}{W} dy \right).$$

必要ならば法ベクトルを取り換えることで  $H \geq \alpha > 0$  としてよい.  
上式の左辺は (左辺)  $\geq 2\alpha\pi R_1^2$  を得る.

一方, 右辺は Cauchy-Schwarz の定理より

$$\begin{aligned} \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left( -\frac{\Phi_y}{W} dx + \frac{\Phi_x}{W} dy \right) &\leq \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \sqrt{\frac{|\nabla\Phi|^2}{1+|\nabla\Phi|^2}} (dx^2 + dy^2)^{1/2} \\ &< \oint_{x^2+y^2=R_1^2} (dx^2 + dy^2)^{1/2} = 2\pi R_1. \end{aligned}$$

よって,  $2\alpha\pi R_1^2 < 2\pi R_1$  が成り立つので,  $R_1 \rightarrow R$  で定理を得る.

□

## Part 2 : Lorentz-Minkowski 空間のグラフ曲面の話

$\mathbf{R}_1^3 = (\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$  : 3次元 Lorentz-Minkowski 空間

### Lorentz 計量

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$  に対し

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle_L := x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

### 空間的・時間的はめ込み

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$  : 領域

はめ込み  $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}_1^3$  が

- **空間的** (space-like)  $\iff X$  による誘導計量が  $\Omega$  上で Riemann 計量
- **時間的** (time-like)  $\iff X$  による誘導計量が  $\Omega$  上で Lorentz 計量

# $\mathbf{R}_1^3$ の極大グラフ

## Definition

$X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}_1^3: C^r$  級空間的はめ込み ( $r \geq 2$ )  
曲面  $X(\Omega)$  の平均曲率が恒等的に 0 となるとき,  
その曲面を **極大曲面** (maximal surface) と呼ぶ.

非径数表示 (non-parametric form)

$$X(x, y) = (x, y, \Psi(x, y)), \quad \Psi(x, y) \in C^2(\Omega, \mathbf{R}).$$

$X$  が空間的はめ込み  $\Leftrightarrow 1 - |\nabla\Psi|^2 > 0 \Leftrightarrow |\nabla\Psi| < 1$ .

$\mathbf{R}_1^3$  の空間的グラフ

$$\Gamma_\Psi = \{(x, y, \Psi(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

が極大曲面となる条件は

$$(1 - \Psi_y^2)\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + (1 - \Psi_x^2)\Psi_{yy} = 0. \quad (9)$$

この方程式を **ZMC 方程式** と呼ぶ.

# Calabi-Bernstein の定理

## Ref.

- E. Calabi, Examples of Bernstein problem for some nonlinear equations, Proc Symp. Pure Appl. Math. 15, 223–230 (1968).
- S. Akamine, M. Umehara, K. Yamada, Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B 7, 17–27 (2020) .

## Theorem (Calabi-Bernstein の定理)

$\Psi(x, y) \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  で,  $|\nabla\Psi| < 1$  かつ ZMC 方程式を満たすならば,  $\Psi$  は  $x, y$  の 1 次式である.

**Note :** 上の主張を幾何学的に述べると,  
“ $\mathbf{R}^2$  全体で定義される  $\mathbf{R}_1^3$  の極大グラフは空間的平面のみである” となる.



# Calabi 対応 (流体力学的双対性) (1)

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$  : 単連結領域とする.

## Theorem (Calabi 対応 (流体力学的双対性))

- $\Phi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$  : 極小曲面の方程式 (2) を満たす.  
このとき, 定数の差を除いて定まる  $\Psi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$  で

$$\begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \begin{pmatrix} -\Phi_y \\ \Phi_x \end{pmatrix}$$

かつ, ZMC 方程式 (9) と  $|\nabla\Psi| < 1$  を満たすものが存在する.

- $\Psi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$  : ZMC 方程式 (9) と  $|\nabla\Psi| < 1$  を満たす.  
このとき, 定数の差を除いて定まる  $\Phi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$  で

$$\begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Psi_x^2 - \Psi_y^2}} \begin{pmatrix} \Psi_y \\ -\Psi_x \end{pmatrix}$$

かつ, 極小曲面方程式 (2) を満たすものが存在する.

これらの対応は, 一方が他方の逆対応を与える.

## Calabi 対応（流体力学的双対性）（2）

### Calabi-Benstein の定理の証明

$\Psi$  に対して，Calabi 対応から極小曲面の方程式を満たす  $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  が存在する．極小曲面の Bernstein の定理から  $\Phi$  は  $x, y$  の 1 次式となるので，Calabi 対応から  $\nabla \Psi$  は定数となる．よって，主張が示せる．

**Note :** Bers による Calabi 対応の流体力学的意味付け

Chaplygin 流体を考えたとき， $\Phi$  が速度ポテンシャルに対し， $\Psi$  は流れ関数が対応する．このことから，Calabi 対応は流体力学的双対性とも呼ばれている（Akamine-Umehara-Yamada, 2020）

## Calabi 対応の証明

$\Phi$  が極小曲面方程式を満たすことから

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\Phi}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_x}{\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi_y}{\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}}\right) = 0$$

が成り立つ。これは 1 次微分形式

$$\omega = -\frac{\Phi_y}{\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}} dx + \frac{\Phi_x}{\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}} dy$$

が閉形式であることと同値である。

Poincaré の補題から、 $d\Psi = \omega$  となる  $\Psi \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$  が存在する。  
 $\Psi$  が ZMC 方程式 (9) と  $|\nabla\Psi| < 1$  を満たすことが容易にわかる。

□

# $\mathbf{R}_1^3$ の空間的 CMC グラフ

## Ref.

A. Honda, Y. Kawakami, M. Koiso, S. Tori, Heinz-type mean curvature estimates in Lorentz-Minkowski space, to appear in Revista Matemática Complutense, Open Access.

空間的グラフ  $\Gamma_\Psi := \{(x, y, \Psi(x, y)) \in \mathbf{R}_1^3 \mid (x, y) \in \Omega\}$  の平均曲率  $H$

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \Psi}{\sqrt{1 - |\nabla \Psi|^2}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Psi_x}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\Psi_y}{W} \right) \right\}$$

(ただし,  $W := \sqrt{1 - |\nabla \Psi|^2} = \sqrt{1 - \Psi_x^2 - \Psi_y^2}$ ) と発散形で書ける.

$\mathbf{R}_1^3$  の平均曲率一定グラフに対しては,

**Bernstein の定理の主張はそのままでは成り立たない.**

実際, 後で述べる「双曲面 (hyperbola)」など反例が存在する.

## Theorem (Honda-K-Koiso-Tori, 2021)

$\Delta_R \subset \mathbf{R}^2$  : 原点中心半径  $R$  の開円板,  $\Psi \in C^2(\Delta_R, \mathbf{R})$ .  
このとき,

$$\frac{|\nabla\Psi|}{\sqrt{1-|\nabla\Psi|^2}} \leq M(x^2 + y^2)^k \quad (10)$$

となる  $M > 0$  と  $k \in \mathbf{R}$  が存在し,  $\Gamma_\Psi$  が空間的であるとする.  
 $\Gamma_\Psi$  の平均曲率  $H$  が, ある正の数  $\alpha$  に対して,  $\Delta_R$  上で

$$|H| \geq \alpha > 0$$

を満たすならば,

$$\alpha \leq MR^{2k-1}$$

が成り立つ.

# Heinz 型の平均曲率の評価の証明について

$0 < R_1 < R$  を満たす任意の  $R_1$  を取る. Green の定理より

$$\iint_{\Delta_R} 2H \, dx dy = \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left( -\frac{\Psi_y}{W} dx + \frac{\Psi_x}{W} dy \right).$$

必要ならば法ベクトルを取り換えることで  $H \geq \alpha > 0$  としてよい.  
上式の左辺は (左辺)  $\geq 2\alpha\pi R_1^2$  を得る.

一方, 右辺は (10) と Cauchy-Schwarz の定理より

$$\begin{aligned} \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \left( -\frac{\Psi_y}{W} dx + \frac{\Psi_x}{W} dy \right) &\leq \oint_{x^2+y^2=R_1^2} \frac{|\nabla\Psi|}{\sqrt{1-|\nabla\Psi|^2}} (dx^2 + dy^2)^{1/2} \\ &\leq MR_1^{2k} \oint_{x^2+y^2=R_1^2} (dx^2 + dy^2)^{1/2} \\ &= 2\pi R_1^{2k+1}. \end{aligned}$$

よって,  $2\alpha\pi R_1^2 \leq 2R_1^{2k+1}$  が成り立つので,  $R_1 \rightarrow R$  で定理を得る.

□

# 平面上のグラフ曲面の平均曲率の消滅定理

## Corollary (Honda-K-Koiso-Tori, 2021)

平面  $\mathbf{R}^2$  上で定義された  $C^2$  級関数  $\Psi(x, y)$  のグラフ  $\Gamma_\Psi$  が空間的で、 $\Gamma_\Psi$  の平均曲率が一定であるとする。  $\mathbf{R}^2$  上で

$$\frac{|\nabla\Psi|}{\sqrt{1-|\nabla\Psi|^2}} \leq M(x^2 + y^2)^{(1/2)-\varepsilon}$$

を満たす  $M > 0$  と  $\varepsilon > 0$  が存在するとき、 $\Gamma_\Psi$  の平均曲率は 0 となる。

## Proof.

Heinz 型の平均曲率の評価の結果から、 $\Delta_R$  上で  $\Gamma_\Psi$  の平均曲率  $H$  は  $|H| \leq M/R^{2\varepsilon}$  を満たす。  $R \rightarrow \infty$  とすることで  $H \equiv 0$  を得る。  $\square$

# 勾配条件の幾何学的解釈

グラフ曲面  $\Gamma_\Psi$  が空間的であるとき,

$$\nu(= \nu(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla\Psi|^2}}(\Psi_x, \Psi_y, 1)$$

は  $\Gamma_\Psi$  の時間的単位法ベクトル場となる.

$e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbf{R}_1^3$  も時間的ベクトルとなるので,

$$\langle \nu, e_3 \rangle_L = -\cosh \theta$$

を満たす非負値関数  $\theta(= \theta(x, y)) \geq 0$  が一意的に定まる.

この  $\theta$  を,  $\nu$  と  $e_3$  の間の**双曲的角度** (hyperbolic angle) という.  
このとき

$$\sinh \theta = \frac{|\nabla\Psi|}{\sqrt{1 - |\nabla\Psi|^2}}$$

が成り立つ.



# CMC グラフに対する Bernstein 型定理

## Theorem (Honda-K-Koiso-Tori, 2021)

平面  $\mathbf{R}^2$  上で定義された空間的グラフ  $\Gamma_\Psi$  の平均曲率が一定で、 $\nu$  と  $e_3$  の間の双曲的角度  $\theta$  に対して、 $\mathbf{R}^2$  上で

$$\sinh \theta \leq M(x^2 + y^2)^{(1/2)-\varepsilon} \quad (*)$$

となる  $M > 0$  と  $\varepsilon > 0$  が存在するとき、 $\Gamma_\Psi$  は空間的平面となる。

## Proof.

先の系（消滅定理）と双曲的角度の性質から、仮定を満たせば平均曲率は 0 となる。

よって、Calabi-Bernstein の定理から結果が従う。



# Bernstein 型定理の最良性

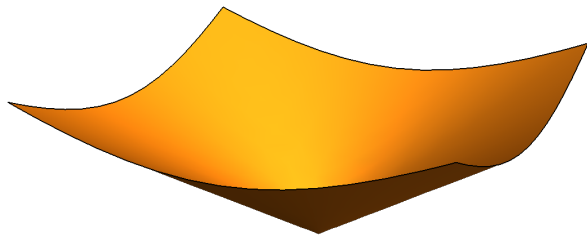
先の系の結果は最良 (optimal) である。実際,

$$\Psi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{H^2}} \quad (H > 0)$$

のグラフ曲面となる双曲面 (hyperboloid) は,  
 $\mathbf{R}^2$  上で定義される平均曲率一定 ( $H$  となる) グラフで,

$$\sinh \theta = H(x^2 + y^2)^{1/2}$$

つまり, (\*) の  $\varepsilon = 0$  の場合となる。



- $\mathbf{R}^3$  の極小グラフに対する Bernstein の定理の証明は様々知られており、色々な見方によって派生する結果が生まれた。
- $\mathbf{R}^4$  の極小グラフに対しては、その高さ関数の Jacobian の値を見ることで、Bernstein 型の定理に応用することができる。
- Calabi-Bernstein の定理は、 $\mathbf{R}^3$  の極小グラフと  $\mathbf{R}_1^3$  の極大グラフの対応から示すことができる。
- $\mathbf{R}_1^3$  の空間的グラフ曲面に対して、関数のある種の勾配評価を仮定することで、Heinz 型の平均曲率の評価が成り立ち、その系として、 $\mathbf{R}^2$  上の CMC グラフの Bernstein 型定理を得ることができる。またその結果は最良である。