微分幾何学 II・演習問題—No.1—

1.　次の各曲線族を積分曲線の族とするような $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場を求めよ。

$$\text{(a)} \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sin t + c \end{cases} (t \in \mathbf{R})(c \in \mathbf{R}) \qquad \text{(b)} \begin{cases} x(t) = c\cos t \\ y(t) = 2c\sin t \end{cases} (t \in \mathbf{R})(c \geq 0)$$

2.$_{\text{(a)}\sim\text{(i)}}$　次の各行列 A により、$\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 X を $X_{\mathbf{x}} := A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$) で定義する。下の各問に答えよ。

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$　(b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$　(c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$　(d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$　(f) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$　(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$　(h) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

(1) X の積分曲線を全て求めよ。

(2) X の 1 パラメーター変換群の各変換は次のどれに該当するか答えよ。

(i) 等長変換である　(ii) 等長変換ではない相似変換である　(iii) 相似変換ではない

3.$_{\text{(a)}\sim\text{(g)}}$　次の各関数 $f(x)$ により、$\mathbf{R}$ 上のベクトル場 X を $X_x := \dfrac{1}{f(x)}$ ($x \in \mathbf{R}$) で定義する。下の各問に答えよ。

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$　(b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$　(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(d) $f(x) = e^x$　(e) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$　(f) $f(x) = \cosh x$　(g) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

(1) X の積分曲線を全て求めよ。

(2) X は完備か否か答えよ。

4.$_{\text{(a)}\sim\text{(h)}}$　次の各 n 次元多様体 M の接束 TM は自明な束 $M \times \mathbf{R}^n$ と同型であることを示せ。

(a)	3 次元トーラス	$M = T^3 := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$	(b)	4 次元トーラス	$M = T^4 := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$
(c)	7 次元球面	$M = \mathbf{S}^7$	(d)		$M = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^3$
(e)	円柱	$M = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$	(f)		$M = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^2$
(g)	2 次元球面の柱	$M = \mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$	(h)	球面から北極を除いた開部分多様体	$M = \mathbf{S}^2 \setminus \{{}^t(0,0,1)\}$

（**ヒント**：(b) $T^4 \subset \mathbf{R}^8$, $TT^4 \subset T\mathbf{R}^8 = \mathbf{R}^8 \times \mathbf{R}^8$ と考え、 M 上の各点で一次独立な 4 個のベクトル場を、具体的に与えよ。(d) $M \subset \mathbf{R}^6$, $TM \subset T\mathbf{R}^6 = \mathbf{R}^6 \times \mathbf{R}^6$ と考え、 M 上の各点で一次独立な 4 個のベクトル場を、具体的に与えよ。(e) $M = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$, $TM \subset T\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ と考え、 M 上の各点で一次独立な 2 個のベクトル場を、具体的に与えよ。(f) $M \subset \mathbf{R}^4$, $TM \subset T\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ と考え、 M 上の各点で一次独立な 3 個のベクトル場を、具体的に与えよ。(g) $M = \mathbf{S}^2 \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^4$, $TM \subset T\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ と考え、 M 上の各点で一次独立な 3 個のベクトル場を、具体的に与えよ。）

微分幾何学II・演習問題—No.2—

5. n 次元多様体 M の接束 TM が自明な束 $M \times \mathbf{R}^n$ と同型ならば、M は向き付け可能であることを示せ。

6. M は n 次元多様体、$\widetilde{M}$ は M の被覆多様体（すなわち $\pi : \widetilde{M} \to M$ 全射かつ局所微分同相が存在する）とする。M の接束 TM が自明な束 $M \times \mathbf{R}^n$ と同型ならば、$\widetilde{M}$ の接束 $T\widetilde{M}$ もまた自明な束 $\widetilde{M} \times \mathbf{R}^n$ と同型となることを示せ。

7. 四元数体 $\mathbf{H}$ において、$q^2 = -1$ を満たす q 全体の集合は、2 次元球面をなすことを示せ。

8.$_{\text{(a)}\sim\text{(e)}}$ 四元数体 $\mathbf{H}$ において、次の各方程式を満たす q を全て求めよ。

(a) $q^2 = 1$ (b) $q^2 = i + j$ (c) $q^2 = i + j + k$ (d) $q^2 = 1 + i + j + k$ (e) $q^2 = -1 + i + j + k$

9.$_{\text{(a)}\sim\text{(b)}}$ $M(3, \mathbf{R})$ の部分集合 G を

(a) $G := SO(2,1) = \{P \in M(3,\mathbf{R}) \mid {}^tPE_{2,1}P = E_{2,1}, \det P = 1\}$, $E_{2,1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$

で定義する。次の各問に答えよ。

(1) G は $SL(3, \mathbf{R})$ の部分群となることを示せ。

(2) G は $M(3, \mathbf{R})$ （$= \mathbf{R}^9$ と見なす）の閉部分多様体となることを示せ。

(3) 単位元 E における G の接空間 T_EG を求めよ。

(4) 任意の $A \in T_EG$ に対し、$X_E = A$ を満たす G 上の左不変ベクトル場 X を求めよ。

10.$_{\text{(a)}\sim\text{(e)}}$ $M(3, \mathbf{R})$ の部分集合 G を

(a) $G := \left\{ \begin{pmatrix} P & \mathbf{q} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbf{R}) \middle| P \in SO(2), \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2 \right\}$

(b) $G := \left\{ \begin{pmatrix} P & \mathbf{q} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbf{R}) \middle| P \in SL(2,\mathbf{R}), \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2 \right\}$

(c) $G := \left\{ \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & c \end{pmatrix} \in M(3,\mathbf{R}) \middle| c\,{}^tPP = E_2 \right\}$

(d) $G := \left\{ \begin{pmatrix} P & \mathbf{q} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbf{R}) \middle| {}^tPE_{1,1}P = E_{1,1}, \det P = 1, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2 \right\}$, $E_{1,1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $G := \left\{ \begin{pmatrix} x & u & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, u \in \mathbf{R},\ xyz = 1 \right\}$

で定義する。G が $M(3, \mathbf{R})$ （$= \mathbf{R}^9$ と見なす）の閉部分多様体となることは認めて、次の各問に答えよ。

(1) G は $SL(3, \mathbf{R})$ の部分群となることを示せ。

(2) 単位元 E における G の接空間 T_EG を求めよ。

(3) 任意の $A \in T_EG$ に対し、$X_E = A$ を満たす G 上の左不変ベクトル場 X を求めよ。

微分幾何学 II・演習問題—No.3—

11. M は多様体、ω_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ は M 上の 1 次微分形式とする。M 上の 3 次微分形式 $\omega := \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega_4 \wedge \omega_5 \wedge \omega_6$ に対し、$\omega \wedge \omega = 0$ が成り立つことを示せ。

12. M は多様体、ω_i $(i = 1, \ldots, n)$, η_j $(j = 1, \ldots, n)$ は M 上の 1 次微分形式とする。$\omega_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ のとき、a_{ij} を (i, j) 成分とする n 次正方行列を A とおくと、

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \det A \cdot \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n$$

が成り立つことを示せ。

13.$_{\text{(a)}\sim\text{(c)}}$ f, g, h は $\mathbf{R}^3$ 上の C^∞ 級関数とする。$\mathbf{R}^3$ 上の次の微分形式 ω, η に対し、$d\omega$, $d\omega \wedge \eta$, $d\eta$, $\omega \wedge d\eta$, $\omega \wedge \eta$, $d(\omega \wedge \eta)$ を求めよ。

(a) $\omega := f dx_1, \eta := g dx_2$　　(b) $\omega = f dx_1 + g dx_2, \eta = h dx_3$　　(c) $\omega = f dx_1, \eta = g dx_2 + h dx_3$

14.$_{\text{(a)}\sim\text{(b)}}$ f, g は $\mathbf{R}^4$ 上の C^∞ 級関数とする。$\mathbf{R}^4$ 上の次の微分形式 ω, η に対し、$d\omega$, $d\omega \wedge \eta$, $d\eta$, $\omega \wedge d\eta$, $\omega \wedge \eta$, $d(\omega \wedge \eta)$ を求めよ。

(a) $\omega := f dx_1 \wedge dx_2, \eta := g dx_3$　　(b) $\omega = f dx_1, \eta = g dx_2 \wedge dx_3$

15. f, g, h は $\mathbf{R}^4$ 上の C^∞ 級関数とする。$\mathbf{R}^4$ 上の微分形式 $\omega_1 = f dx_1$, $\omega_2 = g dx_2$, $\omega_3 = h dx_3$ に対し、$d\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$, $\omega_1 \wedge d\omega_2 \wedge \omega_3$, $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge d\omega_3$, $d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)$ を求めよ。

16. $z = x + yi$ とおくとき、$dz \wedge d\bar{z}$ を dx と dy を用いて表せ。

17. $\mathbf{R}^2$ 上の微分形式 $\omega_1 = -x_2 dx_1$, $\omega_2 = x_1 dx_2$ に対し、次の各問に答えよ。

(1) $d\omega_1$, $d\omega_2$ を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^2$ 内の任意の C^∞ 級 Jordan 閉曲線 C に対し、$\displaystyle\int_C \omega_1 = \int_C \omega_2$ が成り立つことを示せ。（但し $\displaystyle\int_C \omega_j := \int_C i^*\omega_j$ $(j = 1, 2)$, $i : C \to \mathbf{R}^2$ は包含写像とする。）

(3) $\mathbf{R}^2$ 内の原点を中心とする半径 R の円 $\mathbf{S}^1(R)$ に対し、積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{S}^1(R)} \omega_j$ $(j = 1, 2)$ の値を求めよ。

(4) 写像 $F : [0, \infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ を $F(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定義する。$F^*(\omega_1 + \omega_2)$ を求めよ。（すなわち、$\mathbf{R}^2$ の極座標 (r, θ) を用いて、$\omega_1 + \omega_2$ を表せ。）

微分幾何学 II・演習問題—No.4—

18.　$\mathbf{R}^3$ 内の原点を中心とする単位球面 $\mathbf{S}^2$ について、立体射影による座標近傍系 $\{(V_\pm, \psi_\pm)\}$ を考え、(V_-, ψ_-) の局所座標系を (x, y) とする。

$$\omega := \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dx \wedge dy$$

とおく。次の各 φ により与えられる $\mathbf{S}^2$ の変換に対し、$\varphi^* dx$, $\varphi^* dy$, $\varphi^*(dx \wedge dy)$, $\varphi^* \omega$ を求めよ。

(1) x_3 軸に関する θ 回転。

$$(x, y) = \varphi(u, v) := (u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)$$

(2) 平面 $x_2 = x_1 \tan\dfrac{\theta}{2}$ に関する面対称移動。

$$(x, y) = \varphi(u, v) := (u\cos\theta + v\sin\theta, u\sin\theta - v\cos\theta)$$

(3) x_1 軸に関する π 回転。

$$(x, y) = \varphi(u, v) := \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\right)$$

(4) x_2 軸に関する π 回転。

$$(x, y) = \varphi(u, v) := \left(\frac{-u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

(5)　$z = x + yi$, $w = u + vi$, $\gamma = \alpha + \beta i$ とおくとき、次式で与えられる回転。但し、 α, β は実数の定数とする。（**ヒント**：問 16 を用いると計算が楽。）

$$z = \varphi(w) := \frac{\overline{\gamma} w + 1}{w - \gamma}$$

19.　問 18 の ω について、次の各問に答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{S}^2} \omega$ の値を求めよ。

(2) U_{3-} は $\mathbf{S}^2$ の南半球とする。積分 $\displaystyle\int_{U_{3-}} \omega$ の値を求めよ。

20.　問 18 の ω と、

$$(x, y) = \varphi(u, v) := (u^2 - v^2, 2uv)$$

により与えられる C^∞ 級写像 $\varphi : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ に対し、次の各問に答えよ。

(1) $\varphi^* dx$, $\varphi^* dy$, $\varphi^*(dx \wedge dy)$, $\varphi^* \omega$ を求めよ。

(2) 積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{S}^2} \varphi^* \omega$ の値を求めよ。

微分幾何学 II・演習問題—No.5—

21.　$\mathbf{R}^3$ から x_1x_2 平面を除いた空間上の 2 次微分形式 $\omega = \dfrac{1}{x_3}dx_1 \wedge dx_2$ に対し、次の各問に答えよ。

(1) x_3 軸に関する θ 回転

$$(x_1, x_2, x_3) = \psi_3(y_1, y_2, y_3) := (y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta, y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta, y_3)$$

に対し、${\psi_3}^*\omega$ を求めよ。

(2) 平面 $x_2 = x_1 \tan\dfrac{\theta}{2}$ に関する面対称移動

$$(x_1, x_2, x_3) = \psi_0(y_1, y_2, y_3) := (y_1 \cos\theta + y_2 \sin\theta, y_1 \sin\theta - y_2 \cos\theta, y_3)$$

に対し、${\psi_0}^*\omega$ を求めよ。

(3) x_1 軸に関する θ 回転

$$(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(y_1, y_2, y_3) := (y_1, y_2 \cos\theta - y_3 \sin\theta, y_2 \sin\theta + y_3 \cos\theta)$$

に対し、${\psi_1}^*\omega$ を求めよ。

(4) x_2 軸に関する θ 回転

$$(x_1, x_2, x_3) = \psi_2(y_1, y_2, y_3) := (y_3 \sin\theta + y_1 \cos\theta, y_2, y_3 \cos\theta - y_1 \sin\theta)$$

に対し、${\psi_2}^*\omega$ を求めよ。

22.　原点を中心とする半径 R の球面 $\mathbf{S}^2(R)$ について、直交射影による座標近傍系 $\{(U_{i\pm}, \varphi_{i\pm})\}_{i=1,2,3}$ を考える。また、経度 θ_1 と緯度 θ_2 による座標近傍 (V, ψ) を

$$V := \mathbf{S}^2(R) \setminus \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}^2(R) \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \psi^{-1}(\theta_1, \theta_2) := (R\cos\theta_1 \cos\theta_2, R\sin\theta_1 \cos\theta_2, R\sin\theta_2) \qquad (-\pi < \theta_1 < \pi, -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2})$$

により定義する。$i : \mathbf{S}^2(R) \to \mathbf{R}^3$ を包含写像とする。問 21 の ω について、次の各問に答えよ。

(1) (U_{1+}, φ_{1+}) の局所座標系を用いて $i^*({\psi_1}^*\omega)$ を表せ。

（$i \circ {\varphi_{1+}}^{-1} : \varphi_{1+}(U_{1+}) \to \mathbf{R}^3$ に対し、$(i \circ {\varphi_{1+}}^{-1})^*({\psi_1}^*\omega)$ を求めよ。）

(2) 積分 $\displaystyle\int_{U_{3+}} i^*\omega$ の値を求めよ。

(3) (U_{2+}, φ_{2+}) の局所座標系を用いて $i^*({\psi_2}^*\omega)$ を表せ。

（$i \circ {\varphi_{2+}}^{-1} : \varphi_{2+}(U_{2+}) \to \mathbf{R}^3$ に対し、$(i \circ {\varphi_{2+}}^{-1})^*({\psi_2}^*\omega)$ を求めよ。）

(4) 積分 $\displaystyle\int_{U_{2+}\cap U_{3+}} i^*\omega$ の値を求めよ。

(5)　(V, ψ) の局所座標系（経度 θ_1 と緯度 θ_2 ）を用いて $i^*\omega$ を表せ。

(6)　積分 $\displaystyle\int_{U_{1+}\cap U_{2+}\cap U_{3+}} i^*\omega$ の値を求めよ。

微分幾何学 II・演習問題—No.6—

23. $\mathbf{R}^3$ 上の微分形式

$$\omega := x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$$

に対し、次の各問に答えよ。

(1) $d\omega$ を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^3$ 内の原点を中心とする単位球面 $\mathbf{S}^2$ に対し、積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{S}^2} \omega$ の値を求めよ。(但し $\displaystyle\int_{\mathbf{S}^2} \omega := \int_{\mathbf{S}^2} i^*\omega$, $i : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$ は包含写像とする。)

(3) θ は実数の定数とし、$\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を x_3 軸に関する θ 回転、すなわち

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta \\ y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta \\ y_3 \end{pmatrix}$$

とする。$\varphi^*\omega$ を求めよ。

(4) 立体射影による $\mathbf{S}^2$ の座標近傍系 $\{(V_\pm, \psi_\pm)\}$ を考え、(V_+, ψ_+) の局所座標系を (x, y) とする。写像 $\psi_+^{-1} : \mathbf{R}^2 \to V_+ \subset \mathbf{S}^2$ による $i^*\omega$ の引き戻し $(\psi_+^{-1})^*(i^*\omega)$ を求めよ。(すなわち、$\mathbf{S}^2$ 上の微分形式 $i^*\omega$ を (x, y) を用いて表せ。解答において、ψ_+^{-1} による引き戻しの記号 $(\psi_+^{-1})^*$ は省略してよい。)

微分幾何学 II・演習問題—No.7—

24.　D は $\mathbf{R}^2$ 内の C^∞ 級単純閉曲線に囲まれた有界領域とする。境界 ∂D の弧長パラメーター表示を $(x(t), y(t))$ とするとき、∂D に沿う外向き単位法ベクトル場 n による微分は

$$\frac{\partial}{\partial n} = y'(t)\frac{\partial}{\partial x} - x'(t)\frac{\partial}{\partial y}$$

で与えられる。

(1)　$\overline{D}$ を含む領域上 C^2 級な関数 f について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} dt = \int_{\overline{D}} \Delta f dx \wedge dy$$

(2)　$\overline{D}$ を含む領域上 C^2 級な関数 f, g について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dt = \int_{\overline{D}} (f\Delta g - g\Delta f) dx \wedge dy$$

（**ヒント**：$d\{f(-g_y dx + g_x dy)\}$, $d\{g(-f_y dx + f_x dy)\}$ を求めてみよ。）

25.　D は $\mathbf{R}^2$ 内の C^∞ 級単純閉曲線に囲まれた有界領域とする。境界 ∂D の弧長パラメーター表示を $(x(t), y(t))$ とするとき、∂D に沿う外向き単位法ベクトル場は

$$n = (y'(t), -x'(t))$$

で与えられる。$\overline{D}$ を含む領域上の C^1 級ベクトル場 $X = (f, g)$ について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \langle X, n \rangle dt = \int_{\overline{D}} \mathrm{div}\, X dx \wedge dy$$

（**ヒント**：$\mathrm{div}\, X = f_x + g_y$ である。$\langle X, n \rangle dt$ を dx, dy を用いて表してみよ。）

微分幾何学 II・演習問題—No.8—

26. D は $\mathbf{R}^3$ 内の C^∞ 級閉曲面に囲まれた有界領域とする。境界 ∂D の開部分集合 U が正の向きの局所座標系 (u,v) により $F(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と表されているとすると、∂D の面積要素 dS は U 上

$$dS|_U = ||F_u \times F_v|| du \wedge dv$$

と表され、また ∂D に沿う外向き単位法ベクトル場 n による微分は

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{||F_u \times F_v||}\left\{(y_u z_v - y_v z_u)\frac{\partial}{\partial x} + (z_u x_v - z_v x_u)\frac{\partial}{\partial y} + (x_u y_v - x_v y_u)\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

で与えられる。次の各問に答えよ。

(1) $F^*(dx \wedge dy)$, $F^*(dy \wedge dz)$, $F^*(dz \wedge dx)$ を求めよ。

(2) $\overline{D}$ を含む領域上 C^2 級な関数 f について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_{\overline{D}} \Delta f dx \wedge dy \wedge dz$$

(3) $\overline{D}$ を含む領域上 C^2 級な関数 f, g について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS = \int_{\overline{D}} (f\Delta g - g\Delta f) dx \wedge dy \wedge dz$$

（**ヒント**：$d\{f(g_x dy \wedge dz + g_y dz \wedge dx + g_z dx \wedge dy)\}$, $d\{g(f_x dy \wedge dz + f_y dz \wedge dx + f_z dx \wedge dy)\}$ を求めてみよ。）

27. D は $\mathbf{R}^3$ 内の C^∞ 級閉曲面に囲まれた有界領域とする。境界 ∂D の開部分集合 U が正の向きの局所座標系 (u,v) により $F(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と表されているとすると、∂D の面積要素 dS は U 上

$$dS|_U = ||F_u \times F_v|| du \wedge dv$$

と表され、また ∂D に沿う外向き単位法ベクトル場は

$$n = \frac{F_u \times F_v}{||F_u \times F_v||}$$

で与えられる。次の各問に答えよ。

(1) $F^*(dx \wedge dy)$, $F^*(dy \wedge dz)$, $F^*(dz \wedge dx)$ を求めよ。

(2) $\overline{D}$ を含む領域上の C^1 級ベクトル場 $X=(f,g,h)$ について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \langle X, n\rangle dS = \int_{\overline{D}} \mathrm{div}\, X dx \wedge dy \wedge dz$$

（**ヒント**：$\mathrm{div}\, X = f_x + g_y + h_z$ である。$\langle X, n\rangle dS$ を dx, dy, dz を用いて表してみよ。）