解析I・演習問題—No.1—

関数の極限と連続性

1　次の関数の逆関数を求めよ。但し (3) については定義域を適当に制限して答えよ。

(1) $y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$　(2) $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　(3) $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4) $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$　(5) $y = \log(1 + \sqrt{x^2+1}) - \log x$　(6) $y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$　$(x \geq 1)$

(7) $y = \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　(8) $y = \log\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2　a, b, c, d はいずれも正の実数とする。次の極限値を求めよ。

(1a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)(3x-4)}{5x^2+6x-7}$　(1b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+3)(4x^5+6)}{(6x^5+4)(3x^2+1)}$　(1c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(6x^5+4)(3x^2+1)}{(x^2+3)(4x^5+6)}$

(1d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a - x}{x^a + x}$　(1e) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{x^a - x}{x^a + x}$　(1f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(4x^5+6)(7x^8+9)}{(x^2+3)(10x^{11}+12)}$

(2a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}+3}{4e^{x+5}+6}$　(2b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}+3e^{4x+5}}{5e^{4x+3}+e^{2x+1}}$　(2c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}+3e^{4x}}{4e^{3x+2}+e^x}$

(2d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+3}+4e^{5x+6}}{6e^{5x+4}+3e^{2x+1}}$

(3a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a\log 2x + b}{c\log x + d}$　(3b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a + b\log x}{c + d\log 2x}$　(3c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2)+\log(3x)}{\log(2x)+\log(x^3)}$

(4a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan ax}{\sin bx \cos cx}$　(4b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x \tan 4x}{\cos 5x \tan 6x}$　(4c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin ax}{\cos bx \tan cx}$

(4d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x \cos 2x}{\cos 3x \tan 6x}$　(4e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x \tan^3 4x}{\tan^4 3x \cos^2 x}$　(4f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan^4 3x \cos^2 x}{\sin 2x \tan^3 4x}$

(4g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos x \tan 2x}{\sin 3x \cos 6x}$

(5a) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x^a}$　(5b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1-\cos x}{x^2}$　(5c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

(5d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$　(5e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cosh x}{x^2}$

(6a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$　(6b) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1+ax)^{b/x}$　(6c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}$

(6d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x-a}\right)^{x-b}$　(6e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(1+x^2\right)^{1/x}$　(6f) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1-x^2)^{1/x}$

(7a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{a^x - b^x}{x}$　(7b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{b^x - a^x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (a^x + b^x)^{1/x}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

3　実係数の方程式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ は、$a_n a_0 < 0$ の時、少なくとも一つ正の解を持つことを示せ。

4　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ はいずれも実数で、$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ とする。方程式

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = 0$$

は $n-1$ 個の実解を持つことを示せ。

解析I・演習問題—No.2—

関数の極限と連続性（続き）

5_a　関数 $x^{1/x}$ $(x>0)$ について、次の各問に答えよ。

(1)　方程式 $x^{1/x}=1/2$ は実解を持つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ を求めよ。

(3)　方程式 $x^{1/x}=1.2$ は 2 個の実解を持つことを示せ。

5_b　関数 $x^{1/\sqrt{x}}$ $(x>0)$ について、次の各問に答えよ。

(1)　方程式 $x^{1/\sqrt{x}}=1/2$ は実解を持つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/\sqrt{x}}$ を求めよ。

(3)　方程式 $x^{1/\sqrt{x}}=1.2$ は 2 個の実解を持つことを示せ。

5_c　a は実数とする。関数 $f(x)=e^x-ax$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ が極値を持つための条件を求めよ。

(3)　(2) で求めた条件の下で、$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　方程式 $e^x=ax$ が 2 個の実解を持つための条件を求めよ。

5_d　a は実数とする。関数 $f(x)=\log x-ax$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to+0} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ が極値を持つための条件を求めよ。

(3)　(2) で求めた条件の下で、$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　方程式 $\log x=ax$ が 2 個の実解を持つための条件を求めよ。

解析I・演習問題—No.3—

1 変数関数の微分

6　関数 $f(x) = x^3$ の導関数が $f'(x) = 3x^2$ であることを定義に戻って示せ。

$7_{a\sim c}$　次の関数 $f(x)$ の導関数を定義に戻って求めよ。

$$(a)\quad f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad (b)\quad f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0) \qquad (c)\quad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

8　関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ。

$9_{a\sim f}$　次の関数について下の問いに答えよ。

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \qquad (b)\quad f(x) = |x|^3$$

$$(c)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & x \geq 0 \\ -2x + 3 & x < 0 \end{cases} \qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$(e)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \left(1 + \cos \dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad (f)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(1)　関数 $f(x)$ は（(e) $x = 0$ で）微分可能であることを示せ。

(2)　導関数 $f'(x)$ の連続性について調べよ。

解析I・演習問題—No.4—

1 変数関数の微分（続き）

$10_{a\sim i}$　$p,\ a$ は正の実数とする。次の関数 f について、下の各問に答えよ。

(a) $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$　(b) $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}\left(1+\cos\dfrac{1}{x}\right) & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^p-1}{x-1} & x\ne 1 \\ p & x=1\end{cases}$　(d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x} & x\ne 0 \\ a & x=0\end{cases}$

(e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\log x}{x-1} & x>0, x\ne 1 \\ 1 & x=1\end{cases}$　(f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & x\ne 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

(g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\ne 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$　(h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\ x\ne 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$

(i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x-\pi} & x\ne \pi \\ -1 & x=\pi\end{cases}$

(1)　$f(x)$ は $x=0$ （(c,e) $x=1$, (i) $x=\pi$ ）で連続であることを示せ。

(2)　$x\ne 0$ （(c) $x\ne 1$; (e) $x>0,\ x\ne 1$; (f) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\ x\ne 0$, (i) $x\ne\pi$ ）で $f(x)$ を微分せよ。

(3)　定義に戻って $f'(0)$ （(c,e) $f'(1)$, (i) $f'(\pi)$ ）を求めよ。

(4)　$f(x)$ は $x=0$ （(c,e) $x=1$, (i) $x=\pi$ ）で C^1 級か否か判定せよ。

11　f,g,h はいずれも微分可能とする。次の関数を微分せよ。

(1) $f\circ g\circ h(x)(=f(g(h(x))))$　(2) $f(g(x)^2h(x))$　(3) $f(g(x)^2+h(x))$

12　次の関数を三回まで微分せよ。

(1a) $e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$	(1b) $e^{-x/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$	
(1c) $e^{-x/\sqrt{2}}\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$	(1d) $e^{-x/\sqrt{2}}\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$	
(2a) e^{x^2+x+1}	(2b) e^{x^2-x+1}	(2c) e^{-x^2+x+1}
(3a) $e^{\sin x}$	(3b) $e^{\cos x}$	(4) $\log(3x^2-2x+1)$
(5a) $\log\cos x$	(5b) $\log\sin x$	(5c) $\log\tan x$
(5d) $\log\cot x$	(6) x^x	
(7a) $\sin(x^2-2x+3)$	(7b) $\cos(x^2-2x+3)$	(7c) $\tan(2x-3)$
(8a) $\mathrm{sinh}x$	(8b) $\mathrm{cosh}x$	(9) $\mathrm{tanh}x$
(10) $\log\mathrm{cosh}x$		

解析I・演習問題—No.5—

1 変数関数の微分（続き）

13　関数 $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　関数 $y = \coth x$ を x について微分せよ。

(2)　導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を $\coth x$ を用いて表せ。

(3)　逆関数 $x = \coth^{-1} y$ を y について微分せよ。

14　次の関数の増減表を書き、極値および凹凸について調べよ。

$$(1)\quad x^4 - 2x^2 + 3 \qquad\qquad (2)\quad x^4 - 4x + 5$$

15　$f(x) = x^{1/x}$ $(x > 0)$ とする。次の各問に答えよ。

(1)　f を微分せよ。

(2)　(1) の結果を用いて、数列 $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=3}^{+\infty}$ は単調減少であることを示せ。

16　n は 3 以上の自然数とする。半径 1 の円に外接する正 n 角形の面積を S_n で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1)　S_n の値を n を用いて表わせ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ を求めよ。

(3)　数列 $\{S_n\}_{n=3}^{+\infty}$ は単調減少であることを示せ。

$17_{a,b}$　a, b, c, d はいずれも正の実数で、特に (a) では $ad - bc > 0$ をみたすものとする。次の関数 $f(x)$ について、下の各問に答えよ。

$$(a)\quad f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{ce^x + de^{-x}} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \log(ae^x + be^{-x}) - x$$

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　（(a) 極限値）$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ を微分せよ。

(4)　$f(x) = 1$ が（(b) 正の）実数解を持つための必要十分条件を、a, b, c, d を用いて表せ。

解析I・演習問題—No.6—

1 変数関数の微分（続き）

18_a　a, b はいずれも実数とする。関数 $f(x) = x^3 - 3ax + b$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ が極値を持つための条件を求めよ。

(3)　(2) で求めた条件の下で、$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　$b^2 - 4a^3 < 0$ のとき、方程式 $x^3 - 3ax + b = 0$ は 3 個の実解を持つことを示せ。

18_b　a, b はいずれも実数とする。関数 $f(x) = x^4 - 2ax^2 + b$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ が 3 点で極値を持つための条件を求めよ。

(3)　(2) で求めた条件の下で、$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　方程式 $x^4 - 2ax^2 + b = 0$ が 4 個の実解を持つための条件を求めよ。

18_c　a, b はいずれも実数とする。関数 $f(x) = x^4 - 4ax^3 + b$ について、次の各問に答えよ。

(1)　極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ は 1 点でしか極値を持たないことを示せ。

(3)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(4)　方程式 $x^4 - 4ax^3 + b = 0$ が 2 個の実解を持つための条件を求めよ。

解析I・演習問題—No.7—

1 変数関数の微分 （続き）

19_a　次の関数を $x=0$ で Taylor 展開（ Maclaurin 展開）せよ。また、その収束半径を求めよ。

(1)	a^x	$(2a)$	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(2b)$	$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
$(3a)$	$\log(x^2+1)$	$(3b)$	$\log(1-x^2)$		
$(4a)$	$\sin x^2$	$(4b)$	$\cos x^2$		
$(5a)$	$\mathrm{Tan}^{-1}x$	$(5b)$	$\tanh^{-1}x$	(6)	$\sinh^{-1}x$

19_b　a, b は実数とする。関数 e^{ax+b} を $x=0$ で Taylor 展開（ Maclaurin 展開）せよ。

$20_{a\sim e}$　p は 0 でも自然数でもない実数とする。a は 0 でない実数で、特に (e,f) では 1 より大きいとする。関数

(a)	$f(x) = x^p$	(b)	$f(x) = x^{p+1} - x^p$	(c)	$f(x) = e^{ax}$
(d)	$f(x) = xe^x$	(e)	$f(x) = e^{ax} - e^x$	(f)	$f(x) = e^{ax} - e^{-ax}$

について、下の各問に答えよ。

(1)　(a,b)　$\dfrac{f^{(n+1)}(1)}{f^{(n)}(1)}$ を n と p を用いて表せ。
(c,e,f)　$f^{(n)}(1)$ を n と a を用いて表せ。
(d)　$f^{(n)}(1)$ を n を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ の $x=1$ におけるテイラー級数展開を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_n(x-1)^n + \cdots$$

とする。$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を n と p （ (c,e,f) n と a; (d) n ）を用いて表せ。

(3)　(2) の級数の収束半径を求めよ。

解析I・演習問題—No.8—

不定積分

21　a, b は正の実数とする。次の不定積分を計算せよ。（積分定数は省略してよい。$*$ はやや難しい。）

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \quad (a \neq b)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-a)(x-b)} \quad (a \neq b)$

(2.5) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-a)^2}$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-a)}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)(x^2+b^2)}$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)}$　　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-a^4}$　　(8) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4-a^4}$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^4-a^4}$　　(10) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^4-a^4}$

(11) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$　　(12) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　(14) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

(15)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$　　(16) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$

(17) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　(18) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$　　(20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a+x}dx$

(21)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$　　(22) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$

(22.5) $\displaystyle\int \log(x^2+a^2)dx$　　(23) $\displaystyle\int x\log(x^2+a^2)dx$

(24) $\displaystyle\int \tanh ax dx$　　(25) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh ax}$

(26) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh ax}$　　(27) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tanh ax}$

(28) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$　　(29) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(30) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+\sin x} \quad (a>1)$　　(31) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+\cos x} \quad (a>1)$

(32) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+\tan x}$　　(33) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+\cot x}$

解析I・演習問題—No.9—

不定積分（続き）

（問 21 のヒント）

(1) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$ **を満たす** $A,\,B$ **の値を求めよ。**

(4) **まず** $\dfrac{1}{(x-a)(x^2+b^2)} = \dfrac{C_1}{x-a} + \dfrac{C_2x+C_3}{x^2+b^2}$ **を満たす** C_1, C_2, C_3 **を求めよ。**

(5) **まず** $\dfrac{1}{x^2(x^2+a^2)} = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{C_3x+C_4}{x^2+a^2}$ **を満たす** C_1, C_2, C_3, C_4 **を求めよ。**

(6) **まず** $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \dfrac{C_1x+C_2}{x^2+a^2} + \dfrac{C_3x+C_4}{x^2+b^2}$ **を満たす** C_1, C_2, C_3, C_4 **を求めよ。**

(9) **まず** $\dfrac{x^2}{x^4-a^4} = \dfrac{C_1}{x-a} + \dfrac{C_2}{x+a} + \dfrac{C_3x+C_4}{x^2+a^2}$ **を満たす** C_1, C_2, C_3, C_4 **を求めよ。**

(13) $\sqrt{a^2-x^2} = a - tx$ **と置換せよ。**

(21) x **の符号に注意せよ。**

(22.5) **（** $\log(x^2+a^2) = (x)'\log(x^2+a^2)$ **）**

(24) $\tanh ax = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$

22　n は 0 または自然数とする。次の不定積分を I_n とするとき、I_n が満たす漸化式を求めよ。また、$I_1,\,I_2,\,I_3$ を具体的に求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^n x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \tan^n x\,dx$　(3) $\displaystyle\int \sinh^n x\,dx$　(4) $\displaystyle\int (\log x)^n dx$

(5) $\displaystyle\int x^n \sin x\,dx$　(6) $\displaystyle\int x^n \cos x\,dx$　(7) $\displaystyle\int x^n \sinh x\,dx$　(8) $\displaystyle\int x^n \cosh x\,dx$

(9) $\displaystyle\int \sqrt{(x^2+a^2)^n}\,dx$

（ヒント）

(1) $I_n - I_{n-2} = \displaystyle\int \sin^{n-2} x(\sin x)'\cos x\,dx$

(9) $I_n - a^2 I_{n-2} = \displaystyle\int x^2\sqrt{(x^2+a^2)^{n-2}}\,dx = \frac{1}{2}\int x\cdot 2x\sqrt{(x^2+a^2)^{n-2}}\,dx$

23　a は 0 でない実数とし、$f(x)$ は $f''(x) = af(x)$ を満たす関数とする。n は 0 または自然数とし、$I_n = \displaystyle\int x^n\, f(x)dx$ とする。

(1) $f(x) = \left(\dfrac{1}{a}f'(x)\right)'$ に注意して、I_n が満たす漸化式を求めよ。

(2) $I_1,\,I_2,\,I_3$ を $f(x), f'(x)$ を用いて（積分記号 $\displaystyle\int$ は用いずに）表せ。

解析I・演習問題—No.10—

定積分

24　次の定積分を求めよ。

$$(1)\ \int_0^{\pi/3} \sin^2 x \cos^2 x dx \qquad (2)\ \int_0^1 x e^{ax} dx \quad (a \neq 0)$$

$$(3)\ \int_0^{1/2} x \cos \pi x dx \qquad (4)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$25_{a\sim d}$　R, r は正の実数で、$r < R$ を満たすとする。次の平面図形を、x-軸について回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

(a) xy-平面上の点 $(0, R)$ を中心とし、半径 r の円板。
(b) xy-平面上の 4 点 $(0, R-r)$, (r, R), $(0, R+r)$, $(-r, R)$ を頂点とする正方形の板。
(c) xy-平面上の 3 点 $(0, R-r)$, (r, R), $(-r, R)$ を頂点とする三角形の板。
(d) xy-平面上の点 $(0, r)$ を中心とし、半径 R の円板。

26　f は連続関数とする。次の等式を示せ。

(1) $\displaystyle \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$

(2) $\displaystyle \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$

(3) $\displaystyle \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

(4) $\displaystyle \int_0^{2\pi} x f(\cos x) dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} f(\cos x) dx$

(5a) $\displaystyle \int_0^{2\pi} f(\sin x + \cos x) dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sqrt{2} \sin x) dx$

(5b) $\displaystyle \int_0^{2\pi} f(\sin x - \cos x) dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sqrt{2} \sin x) dx$

(6a) $\displaystyle \int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_0^{a} (f(x) + f(-x)) dx$

(6b) $\displaystyle \int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x)) dx = 0$

(7a) $\displaystyle \int_{-a}^{a} x f(x) dx = \int_0^{a} x(f(x) - f(-x)) dx$

(7b) $\displaystyle \int_{-a}^{a} x(f(x) + f(-x)) dx = 0$

(7c) $\displaystyle \int_0^{a} x(f(x) + f(a-x)) dx = \frac{a}{2} \int_0^{a} (f(x) + f(a-x)) dx$　(a は正の実数)

(8a) $\displaystyle \int_{-a}^{a} f(\cosh x) dx = 2 \int_0^{a} f(\cosh x) dx$

(8b) $\displaystyle \int_{-a}^{a} x f(\cosh x) dx = 0$

(9) $\displaystyle \int_1^{a} f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^{a} f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}$　$(a > 1)$

（ヒント）

(9)　$1 \leq x \leq \sqrt{a}$ **では** $x^2 = y$, $\sqrt{a} \leq x \leq a$ **では** $\dfrac{a^2}{x^2} = z$ **とそれぞれ置換してみよ。**

解析I・演習問題—No.11—

定積分（続き）

27　a は正の実数とする。次の広義積分を求めよ。

$$(1)\ \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (2)\ \int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(3)\ \int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad (4)\ \int_0^1 x\log x\,dx$$

28　a は正の実数とする。次の広義積分が存在するか否か（有限な値を持つか否か）を判定せよ。

$$(1)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (2)\ \int_0^{\pi/2} \tan x dx \qquad (3)\ \int_0^{\pi/2} \cot x dx$$

$$(4)\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \qquad (5)\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} \qquad (6)\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$$

$$(7)\ \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}dx \qquad (8)\ \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot x}dx \qquad (9)\ \int_0^{+\infty} (1-\tanh x)dx$$

$$(10)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x} \qquad (11)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} \qquad (12)\ \int_0^{1} (\coth x-1)dx$$

$$(13)\ \int_1^{+\infty} (\coth x-1)dx \qquad (14)\ \int_0^{1} \sqrt{\coth x}dx \qquad (15)\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

（ヒント）

(7)　$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ **で** $\frac{\pi}{2} - x \leq \cot x$

(10)　$0 < x \leq 1,\ 1 \leq x < +\infty$ **に分けて考えよ。**

29　a, b は正の実数とする。次の曲線（エピサイクロイド）の長さを求めよ。（この計算はやや面倒なので、手がつかない時は、とりあえず $a = b = 1$（カージオイド）の場合を計算してみること。）

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{2\pi b}{a}\right)$$

30　a は正の実数とする。曲線

$$(a)\ \ y = ax^2 \qquad (b)\ \ y = ax^{3/2} \qquad (c)\ \ y = \frac{1}{a}\cosh ax \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

の長さを $\ell(a)$ で表すことにする。次の各問に答えよ。

(1)　$\ell(a)$ の値を a を用いて表せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0} \ell(a)$ を求めよ。

解析I・演習問題—No.12—

定積分（続き）

31　a は正の定数とする。次の三つの直円柱面で囲まれた立体の体積及び表面積を求めよ。

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad z^2 + x^2 = a^2$$

32　a, b, c はいずれも正の実数（(1) で、$a < b$, (5) で、$a < c, b < c$）とする。次の閉領域の体積を求めよ。

(1)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le b^2\}$

(2)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le a^2 z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le b^2\}$

(3)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le az,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2a^2\}$

(4)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$

(5)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ z \ge 0,\ z \le ax + c,\ z \le -bx + c\}$

(6)　$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le a,\ -x \le y \le x,\ 0 \le z \le x^2 - y^2\}$