基礎数学B・演習問題—No.1—

行列の演算

1　次の行列の k 乗を $k=4$ まで計算せよ。また、一般の k についても計算してみよ。
（＊以外は難しくない。）

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(11)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(12)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(13)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(14)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2　次の等式を満たす行列 A を一つ見つけよ。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3　次の等式を満たす行列 A は存在しないことを示せ。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4　全ての成分が実数でありかつ次の等式を満たす行列 A は存在しないことを示せ。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

基礎数学Ｂ・演習問題—No.2—

行列式

5　次の行列式を計算せよ。(6) は答の式を因数分解せよ。((7) の行列式は n 次とする。)

$$(1)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} \qquad (5)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \qquad (6)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$(7)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

6　a, b, c はいずれも実数とする。行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ を計算せよ。また、この行列式が 0 となるための a, b, c に関する条件を、出来る限り簡単な形で求めよ。

7　a, b, c, λ はいずれも実数とする。行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{vmatrix}$ を計算せよ。また、この行列式が 0 となるような実数 λ を全て求めよ。

逆行列

8　次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad (5)\ \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad (6)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(7)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(10)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (11)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (12)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

基礎数学Ｂ・演習問題—No.3—

連立方程式１

９　次の連立方程式を、逆行列またはクラーメルの公式を用いて解け。（加減法、代入法等による解答は認めない。）

$$(1)\ \begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y-2z=1 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+5y-7z=7 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x+y+z=8 \\ 2x+3y-z=5 \\ 4x+5y-4z=1 \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} 3x+y+4z=2 \\ x+5y+9z=-10 \\ 2x+6y+5z=2 \end{cases}$$

$$(5)\ \begin{cases} 2x+7y+z=3 \\ 8x+2y+8z=-6 \\ x+8y+2z=9 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ 2x+2y-z=0 \\ -x+2y+2z=3 \end{cases}$$

$$(7)\ \begin{cases} 4x-y+8z=9 \\ 4x+8y-z=-9 \\ -7x+4y+4z=0 \end{cases}$$

行列の階数

10　a は実数とする。行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　行列式 $|A|$ を求めよ。

(2)　$a\neq 0$ でかつ $|A|=1$ となる a の値を求めよ。

(3)　(2) で得た値の a について、A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(4)　一般の a に対し A の階数を調べよ。

11(a)∼(d)　a は実数とする。行列

$$A=\overset{\text{(a)}}{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}}\ \overset{\text{(b)}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}},\ \overset{\text{(c)}}{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}}\ \overset{\text{(d)}}{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}}$$

について、階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ。

基礎数学B・演習問題—No.4—

連立方程式２

12　次の連立方程式は解を持たないことを、階数の条件を用いて示せ。

$$(1)\ \begin{cases} x-2y+3z &= 2\\ 3x-5y+7z &= 7\\ 2x-3y+4z &= 1\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases} x+2y+3z &= 4\\ 2x-\ \ y+\ \ z &= 3\\ x+7y+8z &= 5\end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x+\ \ y+\ \ z &= 1\\ x+2y+3z &= 4\\ x+3y+5z &= 9\end{cases}$$

$13_{(a),(b)}$　連立一次方程式

$$(13.1)\qquad (a)\ \begin{cases} x+ay+az &= 0\\ ax+y+az &= 0\\ ax+ay+z &= 0\end{cases}\qquad (b)\ \begin{cases} ax+ay+az &= 0\\ x+ay+az &= 0\\ x+\ \ y+az &= 0\end{cases}$$

が解を無限個持つような a の値を求めよ。

$14_{(a),(b)}$　連立一次方程式

$$(14.1)\qquad (a)\ \begin{cases} x+ay+az &= 1\\ ax+y+az &= 1\\ ax+ay+z &= 1\end{cases}\qquad (b)\ \begin{cases} ax+ay+az &= 1\\ x+ay+az &= 1\\ x+\ \ y+az &= 1\end{cases}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　(14.1) が解を持たないような a の値を求めよ。

(2)　(14.1) が解を無限個持つような a の値を求めよ。

(3)　(2) で得た値の a について、(14.1) の解を一つ求めよ。

(4)　(3) で得た解を $\begin{cases} x &= x_0\\ y &= y_0\\ z &= z_0\end{cases}$ とする。このとき、(2) で得た値の a に対する (14.1) の全ての解を、

$$\begin{cases} x &= x_0+t_1x_1\\ y &= y_0+t_1y_1\\ z &= z_0+t_1z_1\end{cases}\quad (t_1\in\mathbf{R})\quad \text{または}\quad \begin{cases} x &= x_0+t_1x_1+t_2x_2\\ y &= y_0+t_1y_1+t_2y_2\\ z &= z_0+t_1z_1+t_2z_2\end{cases}\quad (t_1,t_2\in\mathbf{R})$$

のいずれかの形で表すことができる。この場合いずれの形が適当かを答え、x_1, y_1, z_1 または $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ を一組与えよ。(**ヒント**： (13.1))

基礎数学Ｂ・演習問題—No.5—

連立方程式２（続き）

15　次の連立方程式の全ての解を、問 14(4) のいずれかの形で表せ。

(1) $\begin{cases} x-2y+3z = 2 \\ 3x-5y+7z = 7 \\ 2x-3y+4z = 5 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+2y+3z = 4 \\ 2x-y+z = 3 \\ x+7y+8z = 9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+2y+3z = 4 \\ x+3y+5z = 7 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x-2y+3z = 2 \\ 3x-6y+9z = 6 \\ 2x-4y+6z = 4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+2y+3z = 4 \\ 5x+6y+7z = 8 \\ 3x+2y+z = 0 \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x-2y+z = -3 \\ x+y-2z = 0 \\ -2x+y+z = 3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+2y+3z = 2 \\ 2x+3y+4z = 3 \\ 3x+4y+5z = 6 \end{cases}$　(8) $\begin{cases} x+3y-2z = 7 \\ 4x-6y+5z = -5 \\ 6x+z = 9 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+2y+3z = 2 \\ 2x+5y+6z = 3 \\ 3x+6y+9z = 6 \end{cases}$　(10) $\begin{cases} x+3y-2z = 7 \\ 4x-6y+10z = -5 \\ 6x+5y+z = 9 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x+2y+3z = 1 \\ 6x+5y+4z = -2 \\ 7x+8y+9z = 3 \end{cases}$　(12) $\begin{cases} x+2y+3z = 3 \\ 6x+5y+4z = -3 \\ 7x+8y+9z = 3 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x+2y+4z = 3 \\ 2x+4y+8z = 6 \\ -x-2y-4z = -3 \end{cases}$

対角化

16$_{\text{(a)}\sim\text{(b)}}$　行列

$$A = \overset{\text{(a)}}{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}},\ \overset{\text{(b)}}{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}},\ \overset{\text{(c)}}{\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　行列 A の固有値を全て求めよ。

(2)　(1) で求めた各固有値に対する A の固有ベクトルを一つずつ求めよ。

(3)　行列 A を対角化する（すなわち $P^{-1}AP$ が対角行列となるような）正則行列 P を一つ求めよ。

(4)　(3) で求めた P を用いて A^k （ k は自然数＝正の整数）を求めよ。

基礎数学B・演習問題—No.6—

漸化式

17　次の漸化式をみたす数列 $x_n,\ y_n$ の一般項を求めよ。

(1) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + \ \ y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 9x_n + \ \ y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ -3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -15x_n + 8y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = \ \ 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ -3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -14x_n + 8y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = \ \ 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 7x_n - 4y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = \ \ 1 \\ y_1 = -8 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ \ \ x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 12x_n - 4y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = \ \ 1 \\ y_1 = -4 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ \ \ x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 18x_n - 4y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$

(1′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 4y_n - 8 \\ y_{n+1} = 4x_n + \ \ y_n - 4 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

(2′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 4y_n + \ \ 4 \\ y_{n+1} = 9x_n + \ \ y_n + 18 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 6 \end{cases}$

(3′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ -3x_n + 2y_n + 2 \\ y_{n+1} = -15x_n + 8y_n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = \ \ 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$

(4′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ -3x_n + 2y_n - 3 \\ y_{n+1} = -14x_n + 8y_n - 6 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = \ \ 3 \end{cases}$

(5′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 2y_n - 4 \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

(6′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ x_n + 2y_n + 2 \\ y_{n+1} = 7x_n - 4y_n + 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

(7′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ \ \ x_n + 2y_n + 2 \\ y_{n+1} = 12x_n - 4y_n + 7 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

(8′) $\begin{cases} x_{n+1} = \ \ \ \ x_n + 2y_n + 4 \\ y_{n+1} = 18x_n - 4y_n + 8 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad \begin{cases} x_1 = \ \ 6 \\ y_1 = -1 \end{cases}$