数学要論A・演習問題—No.1—

集合と写像

1　次の集合を内包的記法で表わせ。

(1)　$\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

(2)　$\{2, 7, 14, 23, 34, 47\}$

2　次の集合を外延的記法で表わせ。

(1)　$\{n \mid n$ は 100 より小さい正の素数である $\}$

(2)　$\{x \mid x \in \mathbf{C},\ x^6 = -1\}$

(3)　$\{n \mid n \in \mathbf{Z},\ i^n = -1\}$

3　次の式を簡単にせよ。

(1)　$(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

(2)　$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$

4　次の $\boxed{}$ に当てはまる集合を答えよ。

(1)　$A \cup B = \emptyset \iff A = \boxed{}, B = \boxed{}$

(2)　$A \cup (B - C) = (A \cup B) - \boxed{}$

5　次の等式を証明せよ。

(1)　$(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

(2)　$(A - B) - (A - C) = A - (B \cup C^c)$

(3)　$A^c \triangle B^c = A \triangle B$

(4)　$A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A^c \cap C) = (A^c \cap B) \triangle (A \cup C)$

(5)　$(A \cup B) \triangle (A \cup C) = A^c \cap (B \triangle C)$

(6)　$(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

(7)　$(A \triangle C) - (A \triangle B) = ((A \cap B) - C) \cup (C - (A \cup B))$

6　A, B, C は全体集合 X の部分集合とする。次の関係式について、下の各問に答えよ。

$$(A - (B - C))^c \subset ((A - B) - C)^c \tag{6.1}$$

(1)　左辺を“ $-$ ”を用いずに表せ。

(2)　右辺を“ $-$ ”を用いずに表せ。

(3)　関係式 (6.1) を証明せよ。

数学要論A・演習問題—No.2—

集合と写像（続き）

7 (a)　$\mathbf{R}$ の部分集合 A, B を次のように定義する。下の各問に答えよ。

$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left(0,\ \frac{1}{2^n}\right), \qquad B = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \left(0,\ \frac{1}{2^n}\right)$$

(1)　定義に従って、$A = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ \boxed{}\}$ の $\boxed{}$ に当てはまる条件文を書け。

(2)　集合 A を簡単な形で表せ。

(3)　定義に従って、$B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ \boxed{}\}$ の $\boxed{}$ に当てはまる条件文を書け。

(4)　集合 B を簡単な形で表せ。

7 (b)　$\mathbf{R}$ の部分集合 A, B を次のように定義する。下の各問に答えよ。

$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left[\frac{1}{2^n},\ 1\right], \qquad B = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \left[\frac{1}{2^n},\ 1\right]$$

(1)　定義に従って、$A = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ \boxed{}\}$ の $\boxed{}$ に当てはまる条件文を書け。

(2)　集合 A を簡単な形で表せ。

(3)　定義に従って、$B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ \boxed{}\}$ の $\boxed{}$ に当てはまる条件文を書け。

(4)　集合 B を簡単な形で表せ。

8　次の対応 Γ のグラフ $G(\Gamma)$ を描け。

(1)　$\Gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \Gamma(x) = \{y \mid \sin y = x\}$

(2)　$\Gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \Gamma(x) = \{y \mid |y - x| < 1\}$

(3)　$\Gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ \Gamma(x) = \{y \mid y$ の小数点以下を四捨五入すると x になる $\}$

9　写像 $\Gamma : A \to A$ の逆対応 Γ^{-1} が Γ 自身と等しくなるためのグラフ $G(\Gamma)$ に関する必要十分条件は何か答えよ。

10　写像 $f : A \to A$ に関する次の各主張について、正しければ証明し、誤りならば反例を挙げよ。

(1)　f が単射ならば $f \circ f$ も単射である。

(2)　$f \circ f$ が単射ならば f も単射である。

(3)　f が全射ならば $f \circ f$ も全射である。

(4)　$f \circ f$ が全射ならば f も全射である。

数学要論A・演習問題—No.3—

集合と写像（続き）

11　$A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \setminus A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset$ とする。写像 $f : A \to B$ の A_1, A_2 への制限 $f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ に関する次の各主張について、正しければ証明し、誤りならば反例を挙げよ。

(1)　f が単射ならば $f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ も共に単射である。

(2)　$f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ が共に単射ならば f も単射である。

(3)　f が全射ならば $f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ も共に全射である。

(4)　$f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ が共に全射ならば f も全射である。

12　X を全体集合、A, B を X の部分集合とする。

(1)　$G(\Gamma) = A \times B$ となる対応 $\Gamma : X \to X$ は、どのような対応か答えよ。

(2)　次の等式を証明せよ。

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$$

13　X, Y は集合、A, B は X の部分集合とする。

(1)　写像 $f : X \to Y$ に関する次の関係式を証明せよ。

$$f(A)\triangle f(B) \ \subset \ f(A\triangle B) \tag{13.1}$$

(2)　(13.1) で等号が成立しないような写像 $f : X \to Y$ は単射でないことを証明せよ。

(3)　集合 X, Y, A, B を適当に選び、(13.1) で等号が成立しないような写像 $f : X \to Y$ の例を作れ。（**ヒント：**有限集合でも作ることができる。）

14　$\mathbf{N}$ 上で定義された次の関係は同値関係であることを示せ。

$$n \sim m \quad \Longleftrightarrow \quad n + m \text{ は偶数である。}$$

15　$(\cdot, \cdot)$ は開区間を表すものとする。次の式を簡単にせよ。

(1)　$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (-n, n)$

(2)　$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$

(3)　$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$

(4)　$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

数学要論 A・演習問題—No.4—

集合と写像（続き）

16　次の写像 (関数) の右逆写像を一つ与えよ。

(1)　$f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, $x \mapsto x^2$

(2)　$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x$

(3)　$a : \mathbf{N} \to \{-1, 1\}$, $n \mapsto (-1)^n$

(4)　$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$

17(a)　次の写像 (関数) の左逆写像を一つ与えよ。

(1)　$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^x$

(2)　$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $x \mapsto (x, x)$

(3)　$a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto 2n$

17(b)　A, B は空でない集合で、特に A は 2 個以上の元を含むとする。写像 $f : A \to B$ は単射とする。f の左逆写像がただ一つしか存在しないならば、f は全単射であることを示せ。

18(a)　次の関係は同値関係か否か答えよ。同値関係であれば、そのことを証明し、同値関係でなければ、どのような関係であるかも答えよ。

(1)　$n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, $n_1 \sim n_2 \iff n_1$ と n_2 の最大公約数は偶数である。

(2)　$n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, $n_1 \sim n_2 \iff n_1$ と n_2 の最大公約数は奇数である。

18(b)　$\mathbf{N}$ 上で定義された次の関係は同値関係であることを示せ。

$$n \sim m \quad \iff \quad n + 2m \text{ は 3 の倍数である。}$$

19　次の写像 (関数) $f : A \to B$ を $f = j \circ g \circ \varphi$ と分解するとき、f に付随する全単射 $g : A/R \to V(f)$ はどのような写像となるか答えよ。

(1)　$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$

(2)　$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x$

(3)　$h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $n \mapsto (-1)^n$

数学要論A・演習問題—No.5—

集合の濃度

20(a)　0 でない濃度 m に関する等式 $1^m = 1$ を証明せよ。

20(b)　濃度 m について、次の各問に答えよ。

(1)　濃度の積 mm の定義を述べよ。

(2)　濃度のべき m^2 の定義を述べよ。

(3)　等式 $m^2 = mm$ を両辺の定義に従って証明せよ。

21(a)　可算濃度を a, 連続濃度を c で表す。濃度 c^a と a^c の大小を比較せよ。

21(b)　可算濃度を a, 連続濃度を c で表す。等式 $a^a = c$ を証明せよ。

22　次の集合の濃度を求めよ。

(1)　整数を係数とする 2 次多項式全体の集合。

(2)　整数を係数とする 2 次方程式の解となり得る複素数全体の集合。

順序集合, Zorn の補題

23　$\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 上で定義された次の関係について、下の各問に答えよ。

$$(m,n) \leq (m',n') \quad \Longleftrightarrow \quad \text{「}m < m'\text{」または「}m = m' \text{ かつ } n \leq n'\text{」}$$

(1)　この $\leq$ は順序関係であることを示せ。

(2)　$m_0 \in \mathbf{N}$ とする。$\{m_0\} \times \mathbf{N}$ は $(\mathbf{N}^2, \leq)$ の部分集合として、上限、最大元をそれぞれ持つか否か答えよ。

(3)　$(\mathbf{N}^2, \leq)$ は整列集合であることを示せ。

(4)　$m_0 \in \mathbf{N}$ とする。順序単射 $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}^2$ に対し、$f(\{m_0\} \times \mathbf{N})$ は $(\mathbf{N}^2, \leq)$ の部分集合として、上限、最大元をそれぞれ持つか否か答えよ。

(5)　$\mathbf{N} \times \{2\}$ は $(\mathbf{N}^2, \leq)$ の部分集合として、上限、最大元をそれぞれ持つか否か答えよ。

(6)　写像 $f : \{2\} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \{2\}$ を $f(2,n) = (n,2)$ $(n \in \mathbf{N})$ で定義する。$\{2\} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \times \{2\}$ を $(\mathbf{N}^2, \leq)$ の部分集合と見なすとき、f は順序同型写像であることを示せ。

(7)　順序写像 $g : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}^2$ で $g(2,n) = (n,2)$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ を満たすものは存在するか否か答えよ。