これまでの研究成果のまとめ

小畑久美

文中では論文リストの番号で該当する論文を指します.

私は「空間グラフに含まれる結び目の研究」をしている．グラフ G とは頂点の集合と頂点を両端にもつ辺の集合の組のことである．空間グラフとはグラフの 3 次元ユークリッド空間への埋め込みの像である．1 次元サイクルの 3 次元ユークリッド空間への埋め込みの像は結び目になる．任意の 2 頂点間に必ず 1 本辺が存在するグラフを完全グラフとよぶ．空間グラフのサイクルで，結び目 K と同値なものがあるとき，この空間グラフは結び目 K を含むという．Conway と Gordon により 7 頂点完全グラフの任意の空間埋め込みは非自明な結び目を含むことが示された．この定理を精密化することを考え研究を続けている．

完全グラフの頂点を螺線 $H := \{(\cos\theta, \sin\theta, \theta) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ にのせる線形埋め込みを螺線埋め込みと呼ぶ．ここで線形埋め込みとは辺が直線にのるような埋め込みである．田中氏との共同研究 [1] により「$(2n-1)$ 頂点完全グラフと $2n$ 頂点完全グラフの螺線埋め込みが $(2n-5, 2)$ 型トーラス結び目を含む」ことを証明した．この結果は埋め込みを制限しているが，結び目の型も決定しているという点において Conway と Gordon の結果より精密な情報を与えている．

上の結果は螺線埋め込みに限らず成り立つのではないかという予想（今後の研究計画参照）に基づき研究をすすめ，次の結果を得た.「9 頂点完全グラフの螺線埋め込みに対して，xy 平面に射影して現れる交点を 1 つ選んで交差交換をして得られる空間グラフは最小交点数 5 以上の結び目を含む.」

次に円周型埋め込みというものを考えた．この埋め込みも螺線埋め込みを一般化するために考えた．グラフの任意の辺が円周にのるような埋め込みを円周型埋め込みという．任意のグラフは円周型埋め込みを許容するが，円周型埋め込みと同値でない空間グラフは存在する．ここからは結び目だけを考える．ただし，結び目を円周と同相な空間グラフとみなす．ここで，頂点の個数は任意とする．結び目 K の円周数 $\mathrm{Circ}(K)$ を n 頂点グラフの円周型埋め込みで，K と同値なものが存在するような n の最小数により定義する．線形埋め込みの場合，非自明な結び目を構成するために必要な辺は少なくとも 6 本必要であるが，円周型埋め込みは 3 本の円弧で非自明な結び目を構成できる．このことから，円周型埋め込みは線形埋め込みより一般の埋め込みに近いと考えた．田中氏との共同研究 [1] により，円周数と既存の不変量 stick number，arc index，最小交点数，bridge number，superbridge number との比較を得た．

さらに，次の結果を得た.「結び目が三葉結び目であることと円周数が 3 であることは同値である.」「結び目が 8 の字結び目ならば円周数は 4 である.」「三葉結び目とその鏡像の連結和は円周数が 4 である.」したがって円周数は連結和に関して加法的でないことも分かった．

結び目 K に対し，不変量 $u_m(K)$ を n 回交差交換することで得られる結び目が m 頂点グラフの円周型埋め込みにより実現されるような n の最小数として定義した．上の結果より，三葉結び目 K に対し，$m \leq 2$ のとき $u_m(K) = 1$，$m \geq 3$ のとき $u_m(K) = 0$ である．一般に，不変量 $u_m(K)$ は m が 2 以下なら K の結び目解消数と等しい．この意味で，$u_m(K)$ は結び目解消数の一般化とみなせる．