これまでの研究成果

能城　敏博 (Nogi Toshihiro)

研究背景

リーマン面の正則族 (M,π,D) が与えられたとき、その正則切断の個数を評価することは基本的な問題である。ここで、s が正則族 (M,π,D) の**正則切断**であるとは、s がリーマン面 D から 2 次元複素多様体 M の中への正則写像で合成写像 $\pi\circ s$ が D の恒等写像となるものである。正則切断の全体を $\mathcal{S}$ とする。

C を固定点を持たない involution τ を持つリーマン面とし、$f:D\to C$ を C の不分岐被覆写像とする。C の種数 $g(C)$ は $g(C)\geqq 2$ と仮定する。M. F. Atiyah は、直積 $D\times C$ 内の f と $\tau\circ f$ のグラフのみで分岐する $D\times C$ の 2 葉の分岐被覆 $\Pi:M\to D\times C$ を構成した。このとき、M は 2 次元複素多様体となり、$\Pi:M\to D\times C$ と射影 $D\times C\to D$ の合成を π とすると、3 組 (M,π,D) はリーマン面の正則族となる。

$g(C)\geqq 2$ なので、$\mathcal{S}$ の元の個数 $\sharp\mathcal{S}$ は次のように評価できる。$\Pi:M\to D\times C$ と射影 $D\times C\to C$ の合成を π' とする。$\mathcal{S}$ の元 $s:R\to M$ と $\pi':M\to C$ の合成 $\pi'\circ s$ は D から C への正則写像となる。$\pi'\mathcal{S}=\{\pi'\circ s\mid s\in\mathcal{S}\}$ とおくと、$\pi'\mathcal{S}$ が D から C への非定数な正則写像全体の集合 $\mathrm{Hol}_{\mathrm{n.c.}}(D,C)$ に含まれることが分かる。$g(C)\geqq 2$ なので、例えば田辺正晴氏によって $\sharp\mathrm{Hol}_{\mathrm{n.c.}}(D,C)$ が有限であることが知られている。よって、$\sharp\pi'\mathcal{S}$ が上から評価でき、その結果 $\sharp\mathcal{S}$ の評価が得られる。

一方、$g(C)=1$ の場合、$\sharp\mathrm{Hol}_{\mathrm{n.c.}}(D,C)$ は無限集合である。そのため、$\sharp\mathcal{S}$ の評価はすぐには得られない。したがって、この場合、正則切断の個数を調べることは意味がある。

研究成果

C を種数 1 の閉リーマン面 (=トーラス) とし、C の一点 0 に対し、$f:D\to C\setminus\{0\}$ を 4 葉不分岐写像とする。さらに 0-写像 $0:D\to C$ を $d\mapsto 0$ で定義する。

論文 [2] では、直積 $D\times C$ 内の f と 0-写像のグラフのみで分岐する $D\times C$ の 2 葉の分岐被覆 $\Pi:M\to D\times C$ を構成した。$\Pi:M\to D\times C$ と射影 $D\times C\to D$ の合成を π とすると、3 組 (M,π,D) は種数 2 のリーマン面の正則族となる。[2] では、(M,π,D) に対し、一般に $\sharp\mathcal{S}$ が高々10 であることを示した。本研究では、$\pi'\mathcal{S}$ を含む集合 $\mathrm{Hol}_{\mathrm{dis}}(D,C)$ の元の個数を決定したことが独創的な点である。

また、M に複素構造がどれくらい入るかは重要な問題である。論文 [3] では、タイヒミュラー空間の理論を使って、(M,π,D) が正則族となる複素構造が存在し、それは唯一つであることを示した。