これまでの研究成果

筒井容平

1　実解析的研究

1.1　$S^m_{0,0}$ class の擬微分作用素の重み付き空間上の有界性

Calderón-Vaillancourt の L^2 有界性の結果と, 宮地晶彦氏による $m = -n|1/p - 1/2|$ での $H^p - L^p$ 有界性の結果に重みを付加した場合、その影響がどう“ m ”の条件にどう表れるかを Herz 空間 $\dot{K}^\alpha_{p,q}$ と その Hardy 化 $H\dot{K}^\alpha_{p,q}$ をもちいて考察した. 結果として $m < -\alpha - n|1/p - 1/2|$ であれば $H\dot{K}^\alpha_{p,q} - \dot{K}^\alpha_{p,q}$ 有界がいえることが分かった. 手法としては, Atom 分解 と 双線形作用素 $S^m_{0,0} \times H\dot{K}^\alpha_{p,q} \to \dot{K}^\alpha_{p,q}$; $(\sigma, f) \mapsto \sigma(X,D)f$ を用いた, 宮地晶彦氏の結果との複素補間を用いた.

1.2　Sharp 極大函数による掛け算の評価

流体の方程式に現れる非線形項 $(u \cdot \nabla)u$ の評価について, Feffereman-Stein の sharp 極大函数の用いた宮地晶彦氏の手法を用いることにより小薗-谷内氏らの評価をより広い函数空間で構築し、さらに高階の微分“ $(u \cdot \nabla^k)u$ ”の評価も考察した. ここでの結果は, 下の 2.1 の研究で応用されている.

1.3　A_∞ weight による BMO-norm の変動

近年の, sharp weighted inequality の発展を受け、その end-point に当たる評価; $\|T\|_{L^\infty \to BMO(w)}$, (T: Calderón-Zygmund operator) の精密な評価に向けて、函数空間 BMO に Mukenhoupt's weight class A_∞ の weight を付加した空間 $BMO(w)$ の変動について考察を行った. 具体的には, $\|f\|_{BMO(w)}/\|f\|_{BMO}$ の上下からの w に関する精密な評価が目的で, 上からの評価は Hytönen-Pérez により成されたので, その別証明と下からの評価を与えた.

2　非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に関する研究

2.1　Weak Herz 空間上での適切性

適切性に関する研究が函数の滑らかさに着眼した函数空間で多く行われているのに対して、函数の減数に着眼した函数空間での研究として Herz 空間の弱型の空間である weak Herz 空間 $W\dot{K}^\alpha_{p,q}$ を用いた. この範囲内での大域解を構成できる最大の空間は、各円環 $\{2^j \le |x| < 2^{j+1}\}$ に $|x|^{-1}$ の特異点を一つ持つ函数を含むので、そのような函数も初期値として扱えることが分かった. ただ、宮地晶彦氏により、その最大の空間は Koch-Tataru が用いた BMO^{-1} に含まれることが示された. 一意性についても、Meyer の方法を用いて類似の結果を得た.

2.2　重み付き Hardy 空間を用いた時間減衰の研究

上述の研究では, おおよそ $L^p(w)$ with $w(x) = |x|^{\alpha p}$, $(-n/p \le \alpha \le n(1-1/p))$ という重み付きの空間での解析であって, この α の条件は $w \in A_p$ を意味している. この重み関する上限, i.e. $\alpha \le n(1-1/p)$ は, 熱核の評価において必要となり, この制限は実解析学における「重み付き Calderón-Zygmund 理論」の視点からも自然なものであるといえる. しかし, Lebesgue 空間 L^p の代わりに Hardy 空間 H^p を用いると, Muckenhoupt 条件 $w \in A_p$ は不要となり, 例えば $H^p(w)$ wtih $w(x) = |x|^{\alpha p}$, $(-n/p < \alpha < \infty)$ という空間が扱える. 結果, 初期値 a が $H^p(w)$ 属すると仮定し α と大きくすることにより, 線形項 $e^{t\Delta}a$ の時間減衰がどこまでもよくなることがわかる. つまり, $L^p(w)$ の場合のような線形項から制限受けずに, 特有の非線形項 $(u \cdot \nabla)u$ の影響だけを見ることができる. 結果として, T. Kato による L^n での大域解 u は, 付加条件として $a \in H^p(w)$ を加え α を大きく取ることにより, その energy $\|u(t)\|_{L^2}$ の時間減衰の order は, 限りなく Wiegner による critical な order $O(t^{-\gamma})$ where $\gamma = (n+2)/4$ に近づくことが分かった. 非線形項の評価には, Coifman-Meyer-Lions-Semmes による“ div-curl lemma ”を重み付き Hardy 空間上に拡張し用いたが, それらは宮地晶彦氏による極大函数の評価や Auscher-Russ-Tchamitchian による approach を用いて示された.