研究計画

モジュライ空間の無限次元対称性の追求が研究テーマである。具体的には以下の 3 項目を研究課題とする。

AGT 予想

AGT 予想とは 4 次元超対称性ゲージ理論と 2 次元共形場理論との対応を指す。数学的な formulation は幾つかあるが、そのうち私が最も興味を持っているのは、インスタントン・モジュライ空間の同変コホモロジー群の直和に W 代数の表現の構造が入るという予想である。このモジュライ空間は代数幾何学的な記述があって、複素射影平面上の枠付き連接層のモジュライ空間と思える。層のモジュライ空間及び W 代数はこれまでの私の研究分野の重要な対象であり、それがこの研究の動機になっている。

上記の formulation において同変コホモロジー群の代わりに同変 K 群を考えるのが K 理論的 AGT 予想である。この場合の表現論サイドの対象は変形 W 代数だと考えられる。この予想の背後に Ding-Iohara-Miki 代数と呼ばれる量子群の一種があることを明らかにするのを研究目的とする。

AGT 予想については物理と数学の双方から既に様々な研究がなされているが、K 理論版については未解明の部分が多い。特に、共形場理論の q アナログが未だ得られていない点が重大な障害になっている。Ding-Iohara-Miki 代数の余積構造を用いることで、K 理論版の予想に関して統一的な視点が与えられると期待している。逆に幾何学的な立場から量子群の構造を理解することで、新たな知見が得られると考えられる。

Hall 代数

前項目で触れた Ding-Iohara-Miki 代数に関連して、Hall 代数の研究を進めたい。2012 年度初めよりこの研究は開始しており、既に 2 周期複体の Hall 代数と通常の Hall 代数の Drinfeld double との関係を明らかにしている。

簡単に Hall 代数に関して説明する。幾つかの条件を満たす Abel 圏に対し Hall 代数と呼ばれる代数系が導入できることが, Ringel によって 20 年ほど前に解明された。その構成を箙の表現のなす圏に適用すれば、Hall 代数は箙に対応する量子群の上三角部分に一致する (ないし部分代数になっている) 事も知られている。上三角部分ではなく量子群全体を記述する理論の探求は、この 20 年間の量子群の研究において重要な指針であった。最近 Bridgeland が導入した 2 周期複体に関する Hall 代数は、そのような理論を与えるものである。

2 周期複体の Hall 代数は別の重要な側面をもつ。Abel 圏として楕円曲線上の連接層のなす圏をとると、その (通常の) Hall 代数は Ding-Iohara-Miki 代数の上三角部分と一致することが, Burban-Schiffmann 及び Schiffmann-Vasserot の研究により知られている。Ding-Iohara-Miki 代数は AGT 予想に関連する代数であり、その重要な性質の一つに、$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ を自己同型群に含むというものがある。この自己同型群は楕円曲線上の連接層の圏の有界導来圏の自己同値群に由来するものと期待されていた。

私は、しかるべき条件を満たす Abel 圏について, Bridgeland の提唱した 2 周期複体の Hall 代数が通常の Hall 代数の Drinfeld double であることを証明した。これと Cramer の研究結果から、2 周期複体の Hall 代数は導来圏の自己同値群に由来する自己同型を持つことが分かる。特に一つ前の段落で述べた、Ding-Iohara-Miki 代数の自己同型が概念的に理解できたことになる。

今後は、Ding-Iohara(-Miki) 代数の様々な実現・表現についての議論を整理したい。また複体の Hall 代数や導来圏の Bridgeland 安定性の関係についても考察したい。

変形 W 代数

変形 W 代数に関する研究も進めたい。特に（変形していない、通常の）W 代数の構成法として知られている量子 Drinfeld-Sokolov 還元の類似の研究を進めたい。

現在知られている変形 W 代数の定義は自由場表示に基づくものであり、その為代数構造の研究や表現の構成が幾分 ad hoc な議論に基づく事が多い。Drinfeld-Sokolov 還元のような函手的構成法があれば、然るべき表現のなす圏を組織的に扱うことが可能であるし、例えば K 理論的 AGT 予想に纏わる問題の手助けを提供してくれると期待する。

更に Ding-Iohara-Miki 代数のような量子群と変形 W 代数との関係を明確にしたい。そうすれば量子群の手法から変形 W 代数を調べることが可能になる。また、Ding-Iohara 代数の普遍 R 行列は、その定義を含めて不明確だが、そこに何らかの示唆を与える可能性がある。