研究計画

釜江哲朗

$\#\mathbb{A} \geq 2$ を満たす有限集合 $\mathbb{A}$，無限集合 Σ と $\mathbb{A}^\Sigma$ の空でない部分集合 Ω が与えられている．また，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とする．

空でない閉集合 $\Theta \subset \mathbb{A}^\mathbb{N}$ が超定常集合であるとは，任意の $\mathbb{N}$ の無限部分集合 $\mathcal{N} = \{N_0 < N_1 < \cdots\}$ に対して，$\Theta[\mathcal{N}] = \Theta$ が成立することをいう．ここで，$\omega \in \mathbb{A}^\mathbb{N}$ に対して，$\omega[\mathcal{N}] \in \mathbb{A}^\mathbb{N}$ は，$\omega[\mathcal{N}](n) = \omega(N_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たす元であり，$\Theta[\mathcal{N}] = \{\omega[\mathcal{N}];\ \omega \in \Theta\}$ と定義される．超定常集合についてはいくつかの特徴付けが知られているが，その一つは，条件 $(\#)$（文献 [56] を参照のこと）を満たす禁止語の有限集合 $\Xi \subset \mathbb{A}^+$ が定める $\mathbb{A}^\mathbb{N}$ の元全体 $\mathcal{P}(\Xi)$ となるということである．ここで，$\mathbb{A}^+ = \cup_{k=1}^\infty \mathbb{A}^k$，$\xi \in \mathbb{A}^k$ が $\omega \in \mathbb{A}^\mathbb{N}$ における禁止語であるとは，$\omega(s_1)\cdots\omega(s_k) = \xi$ となる $\{s_1 < \cdots < s_k\} \subset \mathbb{N}$ が存在しないことをいい，$\mathcal{P}(\Xi)$ は Ξ に属すどの元 $\xi \in \Xi$ も禁止語であるような $\mathbb{A}^\mathbb{N}$ の元 ω の全体からなる集合を意味する

Σ を離散空間と考えたときの Stone-Cech のコンパクト化を $\beta\Sigma$ と記す．すなわち，$\beta\Sigma$ は Σ 上の ultra-filter の全体である．principal ultra-filter は Σ の元と同一視され，$\beta\Sigma \setminus \Sigma$ は Σ 上の nonprincipal ultra-filter の全体である．$\chi_i \in \beta\Sigma_i$ $(i = 1, 2)$ のとき，$\chi_1 \times \chi_2 \in \beta(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ を

$$\chi_1 \times \chi_2 = \{U \subset \Sigma_1 \times \Sigma_2;\ \{x \in \Sigma_1;\ \{y \in \Sigma_2;\ (x, y) \in U\} \in \chi_2\} \in \chi_1\}$$

と定義する．これにより，$\chi \in \beta\Sigma$ に対して $\chi^k \in \beta(\Sigma^k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が帰納的に定義される．

上記の Ω に対して，$S = (s_1, \cdots, s_k) \in \Sigma^k$ のとき，$\Omega[S] \subset \mathbb{A}^k$ を $\Omega[S] = \{\omega(s_1)\cdots\omega(s_k) \in \mathbb{A}^k;\ \omega \in \Omega\}$ と定義する．$\mathbb{A}^k$ の部分集合全体を $\mathcal{B}(\mathbb{A}^k)$ と記すとき，Σ^k から $\mathcal{B}(\mathbb{A}^k)$ への写像 $S \mapsto \Omega[S]$ は連続な写像 $\beta(\Sigma^k) \to \mathcal{B}(\mathbb{A}^k)$ に一意的に拡張される．この意味で $\chi \in \beta\Sigma$ が与えられたとき，この拡張写像の χ^k における値として，$\Omega[\chi^k]$ は意味を持つ．すなわち，$\Lambda \subset \mathbb{A}^k$ に対して，$\Omega[\chi^k] = \Lambda$ は $\{S \in \Sigma^k;\ \Omega[S] = \Lambda\} \in \chi^k$ を意味している．

任意の $\chi \in \beta\Sigma$ に対して，上記の $\Omega[\chi^k]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ は順次拡張される $\mathbb{A}^k$ の部分集合の列となり，射影極限として $\Omega[\chi^\infty] \subset \mathbb{A}^\mathbb{N}$ が定まる．これについて，以下が成立する．

「$\Omega[\chi^\infty]$ は常に超定常集合となる．これを Ω の超定常因子と呼ぶ．とくに，

χ が principal で $\chi \in \Sigma$ のときは，$\Omega[\chi^\infty] = \{a^\infty ; a \in \Omega[\chi]\}$ となる．ただし，$a^\infty = aaa\cdots$．また，任意の $\chi \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ と任意の空でない $\Theta \subset \mathbb{A}^\mathbb{N}$ に対して，Θ が超定常集合であることと $\Theta[\chi^\infty] = \Theta$ となることが同値となる.」

様々な記号力学系 (Ω, T) に対して，Ω の超定常因子が求められている．これらが力学系に対してもつ意味を今後の課題として研究したい．記号力学系におけるシフト変換 T を単位時間の経過を表すものと考えるとき，超定常因子は力学系の持つ性質で時間量には依存せず，時間の前後関係のみに依存するものを表す．これはエントロピー等の従来から考察されてきた不変量とは全く異質のもので興味深い.