

これからの研究計画-Dirichlet 積分量を持つ非線型楕円型方程式の解の存在と解集合の大域的構造について-

私はこれまで、種々の非線形楕円型方程式に対する変分的解析を行ってきた。特に最近では Dirichlet 積分量を持つ非線型楕円型方程式の解の存在についていくつかの興味深い結果を得ている。今後はこの発展的研究として目下次の2つのテーマのもと研究を行う。

1. 非局所的係数による多重解の生成現象のメカニズムと解集合の大域的構造の解明
2. 高次元臨界問題の解決

これまでの解析の中で私は、非局所的係数の持つ興味深いある効果を発見している。それは、非局所的係数の影響によって通常の半線形楕円型方程式においては解が存在しないような状況でも非局所性を持つ問題には解が存在し得ることである。さらに、この非局所性は問題の解の一意性を壊し得ることも同時に分かった。それでは如何なるメカニズムによってこれが可能であるのか？変分的には、非局所性が対応するエネルギー汎関数の構造に複雑さをもたらし、結果、汎関数の複数個の極小点や極大点（またはそれに準ずる点）を誘起するからだと解釈できる。1ではこのメカニズムを全く異なる角度から明らかにする。特に、変分的定式化によって隠れがちな「非局所的係数を持つ方程式」としての側面からの解答を得る。鍵となるのが、方程式の持つスケーリング特性である。実は適切なスケーリングによって、非局所的問題の解とよく知られた半線形楕円型方程式の解の間にはある対応関係があることが分かる。このことと、対応する半線形楕円型方程式の持つ分岐構造に対する解析結果を組み合わせることで、我々の問題において、非局所性が如何にして多重解を生成し得るのかを見て取ることが出来る。さらに、この観察を突き詰めることで、解集合の大域的構造を明らかにすることができると期待をしている。これまで、非局所的問題の大域的分岐構造まで踏み込んだ解析結果は私の知る限りまだない。

また、2では高次元臨界問題の解決に挑む。私の研究を含む、これまでの諸研究によって、3,4次元領域における臨界問題の解の存在については一定の結果が得られている。しかし、高次元臨界問題に対する解析はまだ十分に進んでいない。これは、非局所的効果によって高次元問題における極限方程式の正值解の一意性が壊れることが大きな原因となっている。このことによってPS列の適切な収束性を得るための明確な判定基準を得ることが難しくなるのである。私はPS列の集中 compact 性に対するより精密な解析と上述の非変分的な新しいアプローチを駆使し、高次元臨界問題の解決を試みる。

“On the solvability and global structure of the solutions set of a nonlinear elliptic equation involving the Dirichlet energy”

I have been carrying out the variational analysis of several nonlinear elliptic problems. Recently, I'm especially interested in a nonlinear elliptic problem involving the Dirichlet energy and consequently, getting several interesting results. In my future works, I'm going to progress my research under the following questions.

1. How can the nonlocal coefficient induce multiple solutions of the problem?
2. On the solvability of the critical problem in high dimension

In my recent research, I found out some interesting effect of the nonlocal coefficient on the existence of the solutions. Thanks to the nonlocal coefficient, our problem is solvable even for the situations under which the corresponding semilinear problem is never solvable. Furthermore, it can induce multiple solutions. Why can the nonlocal coefficient help the solvability of the problem and induce the multiple solutions? Variationally, it is regarded as the consequence of the change of the energy structure of the associated functional. It induces the structural complexity enough the functional to admit multiple local minimum or maximum (or minimax) points. In **1**, I would show another answer for the question. In particular, I shall give the answer from the point of the view; “an equation with *the nonlocal coefficient*”. To this end, one of the key tools is the scaling property of the equation. We can observe the relationship between our nonlocal problem and corresponding semilinear problem through an appropriate scaling procedure. Combining this observation and the global results of the solutions set of the associated semilinear problem, we will be able to understand the reason why the nonlocal coefficient can work positively for the solvability of the problem. Furthermore we can expect to obtain the global structure of the solutions set of our nonlocal problem using this new approach. To my best knowledge, there are no previous works in which the researchers get the global structure of solutions set.

In **2**, I would try to solve the critical problem in high dimension. Certain results for the critical problem in three or four dimension are obtained by several works

including mine. But there are not enough work to conclude the solvability of the critical problem in high dimension. The reason lies in the fact that the limiting problem in high dimension admits multiple positive solutions. It causes a crucial difficulty in getting the criterion for the compactness of PS sequences. Carrying out further analysis for the concentration compactness phenomena of PS sequences and utilizing the new approach mentioned above, I would solve the critical problem in high dimension.