

これまでの研究成果-種々の非線形楕円型方程式の変分的解析-

私はこれまで、種々の非線形楕円型方程式に対する変分的手法を用いた解析を行ってきた。特に、次の二つの問題を考えた。

1. 非線形 Neumann 境界条件を持つ非線形楕円型方程式の無限解の存在について
2. Dirichlet 積分量を持つ非線形楕円型方程式の正值解の存在について

1 では、近年関心を集める、非線形 Neumann 境界条件を持つ非線形楕円型方程式を扱った。特に convex-concave 問題と呼ばれる 2 種類の非線形性の共存する問題の無限個解の存在について無限次元臨界点理論の代表的な定理を駆使し調べた。そこでは、先行研究である Garcia-Azorero-Peral-Rossi(2004) の結果の一般化を試みた。一般化の第一段階として非線形項が不定符号の関数係数を持つ場合について考え、問題が無限個解を持つための関数係数に対する十分条件を明らかにした (論文リスト [4])。これに続き、佐賀大学の梶木屋龍治氏との共同研究 ([1]) において、この一般化をはるかに包括する結果を得ることに成功している。そこでは、局所優線形-劣線形条件と我々が呼ぶ新しい条件を導入し、非線形項がこの条件を満たすとき、問題が 2 種類の無限個解を持つことを示した。

2 では、こちらも近年盛んな研究の行われている Dirichlet 積分量を持つ非線形楕円型方程式の正值解の存在について、変分的解析を行った。この方程式は、例えば、Kirchhoff 型と呼ばれる「伸びる」弦の自由振動を記述する波動方程式の定常問題に当たる。他にも Chipot-Lovat(1997) によって紹介された非局所的放物型方程式の定常問題にも当たる。近年この定常問題の変分的解析が非常に盛んに行なわれている。その中でも、私は非線形項が Sobolev の臨界指数を持つ場合について考えた ([2][3] 他投稿中論文 1 編)。この場合、変分的に問題を解く上で重要な Sobolev 空間の埋め込みの compact 性が欠如しており、問題としては非常に繊細になる。その分、最も興味深い問題の一つとして知られている。特に、Palais-Smale 列と呼ばれる近似解の列の収束性に対する解析が問題の焦点となる。私はこの問題に対しまず、P.L. Lions(1985) や Struwe(1984) による PS 列の集中 compact 性に関する解析結果を、非局所的依存性を持つ臨界問題に対応するものに拡張した。その中では方程式の持つ非局所性が、対応する「極限方程式」にまで持ち込まれることを明確に指摘した。さらに、この極限方程式の持つ非局所性を上手く利用することで、適切な条件下で PS 列が適切な収束性を持つことを示すことに成功している。特に 3 次元領域を考えることが基本的な非局所的臨界問題において、様々な困難の生じる 4 次元領域における問題の解の存在について明らかにした研究としてはこれが初めてである。

“The variational analysis on several nonlinear elliptic problems”

I have been studied about the existence of solutions of several nonlinear elliptic problems via variational methods. In particular I considered the following two problems.

1. Existence of infinitely many solutions of nonlinear Neumann problems
2. On the positive solutions of a nonlinear elliptic problem involving the Dirichlet energy

In **1**, I investigated nonlinear elliptic problems with nonlinear Neumann boundary conditions which are extensively studied recently. In particular, I dealt with the situation in which the problem has two different nonlinearities, known as the concave convex nonlinearities. My main aim is to generalize the result by Garcia–Azorero–Peral-Rossi(2004). To the first, I considered the convex concave nonlinearities with indefinite coefficients. As a consequence, I got a sufficient condition on the coefficients to get infinitely many solutions of our problem (The list of my published papers [4]). After that, I succeeded in much more generalization of this result in the joint work with R. Kajikiya at Saga University. In this work, we introduced the new condition called the local superlinear-sublinear condition. We showed the existence of two sequences of solutions of the problem under this condition.

In **2**, I studied about positive solutions of a nonlinear elliptic problem with the Dirichlet energy which is also extensively investigated in recent years. This problem is, for example, considered as the stationary problem of the Kirchhoff type wave equation which describes the free vibrations of elastic strings. Not only that but also it relates to a nonlocal parabolic type problem introduced by Chipot-Lovat(1997). Recently, because of the variational structure of this nonlocal problem, many researchers have been trying to solve it using the variational methods. Among other things, I considered the problem involving the critical Sobolev exponent ([2][3] and the other one is submitted for publication). In this case, because of the lack of the compactness of the Sobolev embedding, which is one of the most important tools in the variational analysis of nonlinear elliptic problems, the problem becomes much more delicate and thus, more interesting. The main difficulty lies in proving the appropriate convergence

of Palais-Smale sequences, which are suitable sequences of approximate solutions. To the first, I tried to extend the results on the concentration compactness phenomena of PS sequences by P.L. Lions(1985) or Struwe(1984) so that it can be applicable to our nonlocal problem. As a consequence, it was clearly pointed out that the nonlocality of the equation is brought to the corresponding *limiting problem*. Moreover, utilizing the nonlocality of the limiting problem, I succeeded in showing that PS sequences admit the desired convergence under appropriate hypotheses. To my best knowledge, this is the first work in which the four dimensional critical problem, which has much more difficulties than those in typical three dimensional one, is dealt with.