

## これまでの研究の成果

### 1. 面積制約条件下での弾性曲線の形状

1966年, M. Kac は「Can one hear the shape of a drum?」というタイトルの論文において, “Dirichlet 条件付きの Laplacian の固有値がすべて一致すれば 2つの領域は合同か?” との問題を提唱した. この問題に関連して, K. Watanabe は面積制約条件下での弾性曲線に関する変分問題を提唱し, 函数解析を用いた直接法によりエネルギー最小解の存在を示し, また, Euler-Lagrange 方程式を導出した. さらに, 面積が周長から定まる円に近い場合の最小解の一意性と領域の凸性を示した.

面積が小さくなるにつれて, 一意性は失われるのか, また, どのような形状になるのかを調べるためには, Euler-Lagrange 方程式を詳細に調べる必要がある. しかし, それは複雑な形をした非局所非線形 2 階境界値問題であり, 取り扱いが極めて困難と思われていた.

この問題に対して, 私は, 龍谷大学の松本和一郎教授と四ツ谷晶二教授と共同研究をはじめ, 楕円関数・完全楕円積分を用いて, Euler-Lagrange 方程式その境界値問題の全ての解の表示公式を発見し, それを用いて大域的構造を明らかにしている. この研究の基本的となる部分をまとめたものを博士論文とした. 指導教員は松本和一郎教授である.

解の表示に関する結果は, 論文 [C2],[C3],[C4],[D1],[D3],[D4] で示した. また, 解の表示公式と解の大域的構造の概要を [F1],[F2] 等で報告をした. また, この結果を一般読者向けに数学セミナーにて連載 [B1] し, 単行本 [A1] として出版した. 今後, 大域的構造解析の結果については欧文誌投稿の準備をしている.

### 2. 弾性曲線の釣り合いの問題

1967年, Tadjbakhsh-Odeh により赤血球の 2 次元数理モデルの形状変形の数値計算結果が示された. これは, 容器 (2 次元弾性曲線内) の内圧を一定にし, その境界に均等に外圧をかけた時の容器の変形を調べる変分問題ともいえる. 彼らは, この変分問題の最小化解の存在や自明解 (円) が不安定になるための圧力差の条件を示した. その Euler-Lagrange 方程式も非局所非線形 2 階境界値問題である.

2009年, Takagi-Watanabe は, 数学的な証明を与えることを目標として, Euler-Lagrange 方程式の解の表示式と示し, 部分的な解答を与えた. 私は, Takagi-Watanabe とは別の解析しやすい全ての解の表示式を発見し, それを用いることにより, 最小化解の大域的構造・形状を完全に明らかにすることができた.

解の表示公式と解の大域的構造の概要を [F8],[F9] 等で発表した. 現在, 欧文誌投稿の準備をしている.

### 3. 完全楕円積分の同次式に関する零点の解析

非局所・非線形境界値問題の解構造の大域的解析を行う上で, 第 1 種・第 2 種・第 3 種完全楕円積分やそれらの合成関数からなる連立超越方程式の解の存在・非存在・一意性を調べる必要が生じる. 幾段階かの予備的な考察を行うことにより, しばしば, 第 1 種, 第 2 種完全楕円積分の同次式を含む単独の超越方程式の零点の解析に帰着できる. しかしながら, 第 1 種・第 2 種完全楕円積分を含んでいることにより, 単に微分するだけではもとの式よりも複雑になり, 解析がますます困難になる場合が多い. そこで, 第 1 種完全楕円積分  $K(k)$ , 第 2 種完全楕円積分  $E(k)$  比  $E(k)/K(k)$  に対応する新たな変数を導入し, 多変数化し代数的な不等式の問題に帰着する方法を見つけた. この際に  $E(k)/K(k)$  の極めて高精度の上下から評価する近似式が必要となる. ガウスの古典的な結果を利用することにより, 有用な近似式も構成できることを示した.

この研究結果は, [F5],[F7],[F11] 等で報告をした. また, 著書 [A1], 連載 [B1] にてその証明と応用例を載せた. この研究は, 松本和一郎教授と四ツ谷晶二教授との共同研究である.