今後の研究計画

佐藤　敬志

Hessenberg 多様体の幾何的な構造は超平面配置によって良く記述されるが、もう一方で通常の旗多様体の GKM 理論における 1 次元以下の軌道の空間も超平面配置によって記述される。このことから、これまでに研究してきたことは超平面配置という観点からまとめ上げられ、さらに発展させることが可能だと考えている。

(a) 擬鏡映群

Weyl 群の一般化として擬鏡映群というものがある。GKM 理論に基いて旗多様体を調べる時に本質的な役割を果たしたのは Weyl 群だったので、擬鏡映群に関しても対応する空間が存在しその幾何は擬鏡映群の組合せ論で記述できると考えるのは自然なことである。そこで 擬鏡映群に対応する「旗多様体」を構成する。まずは、擬鏡映群の組合せ論的性質を調べ、その情報からセル複体を構成し、望む形のコホモロジー環を持つような空間を得る統一的な方法を明らかにする。望む形のコホモロジー環とは、擬鏡映群が $\mathbb{C}^n$ に作用するので、その上の symmetric algebra を不変式で生成されるイデアルで割ったものである。ちなみにこの不変式は本質的に異なるものを並べることで regular sequence となる。

通常の旗多様体の Bruhat 分解においては、Weyl 群の元に長さが与えられていたが、それはセルの次元を表していた。擬鏡映群の場合には、上記の意味で長さを定める方法などの幾何と対応するであろう組合せ論的な性質が意外にもほとんど知られていない。そこで、擬鏡映群の元の長さを超平面配置を用いて定める 方法を模索する。超平面配置は原点に関する対称性があるので、対応する「旗多様体」のポアンカレ双対性と合致すると考えられる。通常の旗多様体の場合には、高次のセルのその貼り付け写像の様子を見ることで低次のセルの情報が明らかになったので、同様の方法で擬鏡映群の最長元に対応する最も次元の高いセルを構成し、その後演繹的に全てのセルの構成方法を得ることができると考える。

(b) Hessenberg 多様体

Regular nilpotent Hessenberg 多様体のセル分解について、そのセルの次元は超平面配置で記述された。さらにそのコホモロジー環も超平面配置の情報から決定したのであるが、この regular sequence で生成されるイデアルの幾何的な意味は明らかになっていない。Regular nilpotent Hessenberg 多様体には局所化定理が使えるような良い S^1-作用が存在して、固定点集合は Weyl 群の部分集合とみなせる。この同一視は超平面配置に基づく。結局、その S^1-同変コホモロジー環は超平面配置が定める領域の数だけ $H^*(BS^1)$ を直和した環の部分環である。ここまで良い条件が揃っているので、セルに対応する S^1-同変コホモロジー環の元（通常の旗多様体の場合、それは 同変シューベルト類 と呼ばれる）を定めたい。

(c) 発展的内容

GKM 理論版の Leray-Hirsch の定理は、代数トポロジーの道具が Weyl 群の組合せ論と結び付いて強力な道具になった例であり、このように組合せ論から定まる空間と代数トポロジーの道具は相性が良いと考えられる。特にこの定理は擬鏡映群に対応する「旗多様体」を含んだファイバー列に対しても成り立つと思われるので、擬鏡映群の組合せ論的性質をもとにこれも証明したい。

擬鏡映群の場合も Hessenberg 多様体の場合も超平面配置の言葉でその幾何を記述しようと考えているので、最終的には両者に対する方法は統一されて然るべきである。これを統一し、超平面配置プラス α の情報から定まる組合せ論で幾何が記述される空間のクラスを得る。