

# これまでの研究成果

鈴木 新太郎

$\beta > 1$  とする.  $[\beta]$  で  $\beta$  未満の最大の整数をあらわすとする. 整数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}$  を用いて与えられる実数  $x \in [0, [\beta]/(\beta - 1)]$  の展開

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$$

を  $x$  の  $\beta$ -展開という.  $\beta$  が 2 以上の整数であるとき, 可算個の点を除き各点  $x \in [0, [\beta]/(\beta - 1)]$  はただ 1 つの  $\beta$ -展開をもつことはよく知られている. しかし  $\beta$  が非整数のとき, Lebesgue 測度に関してほとんどいたるところの点  $x \in [0, [\beta]/(\beta - 1)]$  は非可算個の  $\beta$ -展開をもつことが知られており, その統計的性質は大変興味深い.  $\beta$ -展開の統計的性質は, それを生成する力学系のエルゴード理論的性質と密接に関係している. 私はこれまで  $\beta$ -展開やその一般化と考えられる数の展開を生成する力学系のエルゴード理論に関する研究を行い, 以下のような結果を得た.

## 1. 一般化された $\beta$ -変換の Artin-Mazur ゼータ関数とラップカウンティング関数

$\beta$ -変換は,  $x \in [0, 1]$  に対し  $\tau_{\beta}(x) = \beta x \bmod 1$  で定義される. 変換  $\tau_{\beta}$  による  $x$  の軌道から greedy  $\beta$ -展開が得られることはよく知られている.  $\beta$ -変換の場合, 1 の greedy  $\beta$ -展開の展開係数に対する母関数  $\phi_{\beta}$  を用い, 複素平面上のある領域上で定義される Artin-Mazur ゼータ関数に関する関数等式を明示的に与えることができる. 一般に, 区分的線形拡大写像におけるすべてのブランチの傾きの絶対値が一定である場合, Artin-Mazur ゼータ関数の極は写像のエルゴード的性質を反映することが知られており, その解析的性質の考察は重要である. 私は  $\beta$ -変換の Artin-Mazur ゼータ関数に関する関数等式を,  $\beta$ -変換の傾き正のブランチが傾き負となる場合も許容するような変換族 (一般化された  $\beta$ -変換) の場合に拡張した. また得られた関数等式を用いて, 変換の Artin-Mazur ゼータ関数の解析的性質と  $\beta$  の代数的性質の関連性を考察した (論文リスト [1]).

さらに  $\beta$ -変換の場合, 変換の  $n$  回合成  $\tau_{\beta}^n$  のブランチの個数を用いて定義されるラップカウンティング関数も, 母関数  $\phi_{\beta}$  を用いて関数等式を明示的に与えることができる. 私はその結果を, 一般化された  $\beta$ -変換族の場合に拡張した. 得られた関数等式の応用として, 各ブランチの傾きが負となる場合 (negative  $\beta$ -変換) を含む特殊なケースにおいて, これら 2 つの関数の極が位数をこめて一致することを示した (論文リスト [3]).

## 2. ランダム $\beta$ -変換の不変確率測度とその測度論的エントロピーの明示公式

$\beta$ -変換  $\tau_{\beta}$  を区間  $J_{\beta} := [0, [\beta]/(\beta - 1)]$  上に自然に拡張した変換  $T_{\beta,1}$  (greedy map) と反転写像  $l_{\beta}(x) = [\beta]/(\beta - 1) - x$  ( $x \in J_{\beta}$ ) を用いて定義される変換  $T_{\beta,1}$  に共役な変換  $T_{\beta,0} = l_{\beta} \circ T_{\beta,1} \circ l_{\beta}^{-1}$  (lazy map) をランダムに作用させるような  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times J_{\beta}$  上のランダム力学系  $K_{\beta}$  (ランダム  $\beta$ -変換) を用いると, 各点  $(\omega, x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times J_{\beta}$  の変換  $K_{\beta}$  による軌道を用いて,  $x$  の  $\beta$ -展開を得ることができる. それをランダム  $\beta$ -展開とよぶ. ランダム  $\beta$ -展開により, 各点  $x \in J_{\beta}$  のすべての  $\beta$ -展開が得られることが知られており, この力学系のエルゴード理論的性質から  $\beta$ -展開の統計的性質を考察することが可能となる. 関数解析的手法から, 変換  $K_{\beta}$  に対し,  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  上の  $(1-p, p)$ -Bernoulli 測度  $m_p$  ( $0 < p < 1$ ) と  $J_{\beta}$  上の正規化された Lebesgue 測度  $\lambda_{\beta}$  の直積測度  $m_p \otimes \lambda_{\beta}$  に関して絶対連続であるような不変確率測度がただ 1 つ存在することが分かる. その不変確率測度は直積測度  $m_p \otimes \mu_{\beta,p}$  で表すことができ, さらに可測力学系  $(K_{\beta}, m_p \otimes \mu_{\beta,p})$  はエルゴード的になる. 私は可測力学系  $(K_{\beta}, m_p \otimes \mu_{\beta,p})$  がエルゴード性よりも強い性質である Exact 性をもつことを示した. また, 変換  $K_{\beta}$  の不変確率測度  $m_p \otimes \mu_{\beta,p}$  に対し, 確率測度  $\mu_{\beta,p}$  の密度関数  $f_{\beta,p}$  を明示的に与えた. このことから, ランダム  $\beta$ -展開に関する統計量の定量的評価が可能となる. さらに,  $\lambda$  を  $\mathbb{R}$  上の Lebesgue 測度とすると, 密度関数  $f_{\beta,p}$  の明示式を用いて, 関数  $p \rightarrow f_{\beta,p} \in L^1(\lambda)$  が解析的となること, および関数  $\beta \rightarrow f_{\beta,p} \in L^1(\lambda)$  がある代数的整数の集合上を除き連続となることを示した (論文リスト [2]). 加えて, 可測力学系  $(K_{\beta}, m_p \otimes \mu_{\beta,p})$  の測度論的エントロピーを計算し, その明示公式からパラメータ  $(\beta, p)$  による連続性や解析性を考察した (論文リスト [4]).