

(2) 今後の研究計画

今後の研究では、以下の内容について取り組む。

● 曲率障害によるキリングベクトルの存在判定アルゴリズムの構築

キリングベクトルの可積分条件を解析することで、キリング方程式に解が存在するためにはゼロになっていなければいけない局所的な幾何学量（曲率障害）を同定できる。また逆に、こうした曲率障害を用いることで、与えられた計量に存在するキリングベクトルの本数を判定するアルゴリズムを構築することができる。こうしたアルゴリズムは、多様体の次元や計量の符号に依存することがわかっている。

これまでの研究では、予備解析として、3次元の正定値または不定計量をもつ多様体を考察対象としてきた。これからの研究では、より高次元の多様体を考察する。主な考察対象は、4次元ないし5次元の不定計量をもつ多様体である。その理由は、一般相対論がこうした多様体上で研究されることが多く、確実な需要を見込んでいるためである。特に、5次元のアインシュタイン方程式の厳密解として記述される多様体は、その対称性を正確に把握できていないものが多く存在している。

● キリングテンソルの曲率障害

キリングベクトルの存在を妨げる曲率障害は、可積分条件を解析することによって得られた。これに類似した拡張として、キリングテンソルの存在を妨げる幾何学量を、可積分条件から定式化することを試みる。そして、キリングベクトルの場合と同様に、キリングテンソルの存在を判定するアルゴリズムを構築することを目指す。

● 他の過剰決定系の可積分条件の導出

これまでの研究では、ヤング対称子という射影演算子によって、キリング方程式の延長手続きを整備することができた。こうした延長手続きは、以下に列挙する他の過剰決定系にも適用できる：キリング矢野方程式、キリングスピノール方程式（4次元）、高階スピンをもつ無質量場の運動方程式（4次元）。一方で、可積分条件の具体形を知ることで、物理的・幾何的洞察が得られた前例が多くある。測地線に対する Raychaudhuri 方程式、埋め込まれた超曲面に対する Gauss–Codazzi 方程式などが典型例である。こうした方程式は、一般相対論の特異点定理、重力の正準形式といった理解に貢献した。そこで今後の研究では少し視野を広げて、キリング方程式とは別の過剰決定系の可積分条件から得られる洞察について考えていきたい。

● ヤング対称子による延長手続きの一般化

これまでに発展させてきたヤング対称子による延長手続きは、以下の過剰決定系には適用することができない：共形キリング（テンソル）方程式、共形キリング矢野方程式。その理由は、ヤング対称子が一般線型群の既約分解操作を与えるのに対し、共形キリングテンソルなどの延長手続きでは、特殊直交群の既約分解操作が必要になるためである。そこで、ヤング対称子による一般線型群の既約分解操作にトレース演算を加えることで、特殊直交群の既約分解操作を簡単に実行できる手続きを整備する。これにより延長手続きを一般化することを試みる。