これまでの研究結果

濱本直樹 (Naoki Hamamoto)

私は関数不等式, とくにベクトル場に対する最良 Hardy-Leray 不等式について研究している. G. H. Hardy によって 1 次元の場合に証明されたこの不等式は, J. Leray の Navier-Stokes 方程式論の論文において最良定数込みで高次元へと拡張され, その後も多方面へ応用されてきた.

特に興味を持って取り組んでいるのは, テストベクトル場に渦無しもしくはソレノイダル条件を課した場合に, Hardy-Leray 不等式の最良定数がもとの最良定数とは異なる値に変更されるのか という問題である. この問題は 2007 年, Costin-Maz'ya によってソレノイダル条件において提案されたものの一般化であり, 彼らはソレノイダル場に対する Hardy-Leray 不等式の新しい最良定数を導出した. ただし, この導出過程では計算を容易にするための技術的な条件として軸対称性が仮定されていたため, 軸対称性を使わずに最良定数を計算することができるかどうかは未解決のままであった. このような状況を巡り, 現時点では以下のような研究成果が得られている.

3 次元ソレノイダル場に対する最良 Hardy-Leray 不等式

3 次元ソレノイダル場に対し, 最良 Hardy-Leray 不等式の導出で Costin-Maz'ya が使っていた軸対称条件を弱めるという試みに高橋太教授との共同研究 (論文 [3]) で取り組んだ. その結果, 軸対称性を方位角成分のみに制限しても Hardy-Leray 不等式が Costin-Maz'ya と同じ最良定数を持つことを発見した. そしてさらに, ソレノイダル場の適当な L^2 直交分解を与えることで, 軸対称条件を全く仮定しなくても同じ最良定数が得られることを結論付けた (論文 [2]).

軸対称ソレノイダル場に対する最良 Rellich-Leray 不等式

Hardy-Leray 不等式の 2 階版である Rellich-Leray 不等式の最良定数を一般次元の軸対称ソレノイダル場に対して導出した (論文 [1]). 補足として, 軸対称ベクトル場の特徴付けを与え, 高次元では軸対称ベクトル場が方位角成分を持たないことを示すことによって, Costin-Maz'ya の Hardy-Leray 不等式に対する計算結果を部分的に修正した.

渦無し場に対する最良 Hardy-Leray および Rellich-Leray 不等式

2 次元の場合では, Costin-Maz'ya が導出したソレノイダル場に対する最良 Hardy-Leray 不等式は, 渦無し場に対するそれと同値である. この不等式を高次元渦無し場の場合へ拡張する作業を高橋太教授との共同研究 (論文 [4]) で行い, さらに Rellich-Leray 不等式についても一般次元渦無し場に対する最良定数を導出した.