今後の研究

橋爪惠

結び目・絡み目のダイアグラムや球面曲線に対する局所変形，特に領域交差交換や領域凍結交差交換，球面曲線のライデマイスター移動に関して次のような様々な研究を行なう．

結び目・絡み目に対して様々な結び目不変量を用いた研究がなされているが，特に 1990 年に Vassiliev[Va]によって考えられたバシリエフ不変量は非常に強い不変量であり，ある意味で結び目不変量全ての階層を分け，多くの他の不変量の情報を含んでいる．実際 Vassiliev Conjecture と呼ばれる「全ての結び目の対に対してバシリエフ不変量は移り合うかを判定する」という予想がある．同じ結び目（絡み目）のダイアグラムの対はダイアグラムに対する Reidemister 移動(図１)と呼ばれる operation を繰り返し用いると移り合うことができる．この operation とバシリエフ不変量に関して次の事実がある．

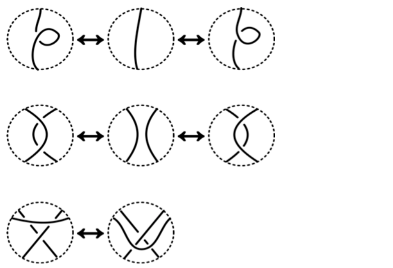

図 1: 破線の円内はダイアグラムの一部を表す.⇔で結ばれた破線の円同士を取り替える操作．特に上段をΩ−Ⅰ,中段をΩ-Ⅱ,下段をΩ−Ⅲと呼ぶ.

事実：バシリエフ不変量がΩ−Ⅰ， Ω−Ⅲで不変ならばΩ−Ⅱで不変

この事実からダイアグラムがΩ−Ⅰ， Ω−Ⅲで移り合うならΩ−Ⅱで移り合うということが期待できる．つまりΩ−Ⅰ, Ω−Ⅱ, Ω−Ⅲで移り合うダイアグラムの集合とΩ−Ⅰ, Ω−Ⅲで移り合うダイアグラムの集合は同じではないか, ということである. しかし, 実際は Hagge-Yazinski [HY]は自明な結び目のダイアグラムであるがΩ−Ⅱが必要となる例を挙げている．そこで次の問題が考えられる．

問題 1: 任意の結び目のダイアグラムに対して, Ω−Ⅰ, Ω−Ⅱ, Ω−Ⅲの内, いくつかを用いて移り合う同値関係の同値類を特徴付けよ．

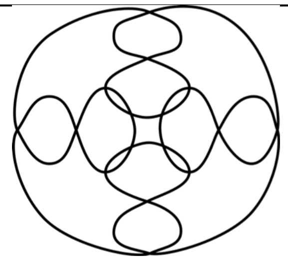

図 2: Hagge- Yazinski の例

この問題を解くことはその結び目を体系的に理解することに繋がるが非常に難しい．そこで，結び目の交差の上下の情報を落としたもの（射影図・球面曲線）を考える．更にダイアグラムのライデマイスター移動の交点の情報を無視した operation を球面曲線のライデマイスター移動という．Viro[V]は，この球面曲線のライデマイスター移動を, 図 2 のダイアグラムの端点同士の繋がり方からいくつかに分けた（ライデマイスター移動Ⅱを weak R-Ⅱと strong R-Ⅱ, Ⅲを weak R-Ⅲと strong R-Ⅲ)．問題１を考える一歩として次の研究を行なう．

任意の球面曲線に対して R−I,weak R-II,strong R-II，weak R-III,strong R-III の内のいくつかを用いて移り合う同値関係の同値類の特徴付け．

また，領域交差交換に関して次の複体を考える．

射影図 G が与えられたとき複体 $C(G)$ の０単体は G の頂点の冪集合の元に対応し, 二つの頂点 v, v' に対して それらが辺で結ばれる必要十分条件は「（v に対応する G の頂点の集合）と（v' に対応する G の頂点の集合）の対称差」が１つの面での領域交差交換で移り合うことである．

この複体の“形”を考えることを新たな視点とし，理論の発展を図る．特に河内明夫−岸本健吾−清水理佳らの考案したスウィッチングシステムの実用性やそれに基づくゲーム“Region Select”の難易度に関する研究を昨年度にしているのでこれをより発展させる．また，井上歩−清水遼[IS]の結果の大域的理解に繋げる．また，結び目の射影図 G に対しては清水氏の結果から，その複体 $C(G)$ は連結になることが分かる（図の例では $C(G)$ は 2 成分からなることに注意せよ）．一方，井上−清水の領域凍結交差交換に関して同様の複体 $C'(G)$ を考えたとする．すると，井上−清水の結果は「ある結び目の射影図 G でその複体 $C'(G)$ が連結でないようなものが存在する」ということを示した，と解釈できる．このように領域交差交換の“変種”を考えるとそれに対応して新しい複体が得られ，その幾何的な性質がこの変種の特性に関わっていることが分かる．そこで，この“哲学”を展開して行くことを考える．

次に，Fisher-Mellor によって定義された *Celtic Knot Design* の一般化した.この一般化された Celtic Knot Design の特徴を調べる

[Va] V. A. Vassiliev, Cohomology of knot space, in Theory of Singularities and its Applications (ed. V. I. Arnold), Adv. Soviet Math. 1, Amer. Math. Soc., 1990.

[Vi] O. Viro, Generic immersions of the circle to surfaces and the complex topology of real alge- braic curves. Topology of real algebraic varieties and related topics, 231–252, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 173, Adv. Math. Sci., 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.