これまでの研究成果のまとめ (岩井雅崇)

論文リストの学術論文 [1] およびプレプリント [3][5] についてその詳細を述べる. 私の専門は**複素代数幾何学**である. 私は代数多様体 ($\mathbb{CP}^N$ の閉部分複素多様体) の分類や複素構造に関して, **代数幾何, 複素幾何, 多変数複素解析を用いて研究を行っている.**

「代数多様体はどれくらいあるのか」という分類問題がある. 複素 1 次元の代数多様体は 19 世紀の時点ですでに分類されており, 2 次元の代数多様体も小平邦彦によって分類されている. 3 次元以上の代数多様体に関して, 森は分類のアルゴリズム (極小モデル理論) を構築し, その業績からフィールズ賞を受賞した. しかし代数多様体の分類や複素構造のモジュライの構成に関しては未だ完成していない.

学術論文 [1] では Popa-Schnell による, 複素構造の変形に関しての以下の予想に取り組んだ.

予想. $f: X \to Y$ を代数多様体 X から n 次元代数多様体 Y への全射正則写像とし, L を Y 上の豊富直線束とする. $b \geq a(n+1)$ を満たす正の整数 a, b について, 順像層 $f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ は Y 上において大域切断で生成される.

この予想は f が恒等写像のときですら解決されておらず, 極めて難しい予想である. Popa-Schnell は L が自由という仮定のもと予想を解決した. 私はこの予想に対し, L が自由である条件を外し, 以下のように部分的解決をした.

定理. $b \geq (n^2 - n)/2 + a(n+1)$ を満たす正の整数 a, b について, 順像層 $f_*(K_X^{\otimes a}) \otimes L^{\otimes b}$ は f の正則値において大域切断で生成される.

先行研究の手法では L が自由という仮定を外せなかった. そのため射に関するコホモロジーの単射性定理など, 先行研究とは異なる複素解析的な手法を用いた.

プレプリント [3][5] では接束が巨大, 擬有効である代数多様体の構造定理について調べた.

代数幾何学の最も基本的な概念は直線束の豊富性である. 豊富性は右の表のようにネフ, 巨大, 擬有効といった概念に一般化される. これらは代数的な正値性の概念であり, 極小モデル理論 (代数多様体の分類のアルゴリズム) における代数多様体の分類で特に重要な役割を担う.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{豊富}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \boxed{\text{ネフ}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{巨大}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{擬有効}}
\end{tikzcd}$$

森は代数多様体 X の接束 T_X が豊富であるならば, X は複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ と双正則であることを示した. その後 Campana らは接束 T_X がネフであるの代数多様体について調べた. このように接束が代数的な正値性を持っている場合, 代数多様体の構造は限られる. この研究では接束が巨大, 擬有効の場合の代数多様体の構造について研究を行った. 先行研究を含めてまとめると以下の通りである. (プレプリント [5] は東北大学の松村慎一氏と細野元気氏との共同研究である.)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{T_X \text{ が豊富} \Rightarrow X \cong \mathbb{CP}^n} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \boxed{\begin{array}{c} T_X \text{ がネフ} \Rightarrow \text{被覆空間 } \tilde{X} \text{ と滑らかな射 } \tilde{X} \to A \text{ があって} \\ A \text{ は Abel 多様体, ファイバーは Fano 多様体である} \end{array}} \arrow[d] \\
\boxed{[3] T_X \text{ が巨大} \Rightarrow X \cong \mathbb{CP}^n} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} [5] T_X \text{ が擬有効} \Rightarrow \text{被覆空間 } \tilde{X} \text{ と滑らかな射 } \tilde{X} \to A \text{ があって} \\ A \text{ は Abel 多様体, ファイバーは有理連結多様体である} \end{array}}
\end{tikzcd}$$

Fano 多様体は有理連結多様体であることが知られている. よってこの定理は森らの研究のある種の一般化といえる. Campana らの研究では滑らかな計量しか扱っていなかったため, 彼らの方法では擬有効に関して取り扱うのは困難であった. そこでプレプリント [5] では複素解析的な特異計量と代数的な特異葉層構造を用いて, 有理連結多様体を潰す有理写像である MRC ファイブレーションが滑らかな射に取り替えできることを示した. 先行研究とは全く違った方法を用いて示した点に新規性がある.