研究成果

森本真弘
email: mmasahiro0408@gmail.com

1. 概要

ユークリッド空間の部分多様体の 1 つの一般化として，有限次元リーマン多様体の部分多様体がある．別の一般化として，(一般に無限次元の) ヒルベルト空間の部分多様体がある．本研究では，有限次元リーマン多様体内で定義される特殊な対称性を持つ極小部分多様体を，ヒルベルト空間の固有フレドホルム部分多様体に対して定義し，研究を行った．その結果，ヒルベルト空間内において，対称性をもつ無限次元極小部分多様体が多数存在することが判明し，それを通して有限次元部分多様体と無限次元部分多様体の 1 つの決定的差が明らかとなった．

2. 背景と問題

C.-L. Terng により導入された**固有フレドホルム部分多様体** (PF 部分多様体) は，ヒルベルト空間に余次元有限にはめ込まれたヒルベルト多様体であって，形作用素がコンパクト作用素かつ距離関数が Palais-Smale 条件を満たすものである．PF 部分多様体の研究において**平行移動写像**と呼ばれるリーマン沈め込み写像 $\Phi : V \to G/K$ が重要な役割を果たす．ここで G/K は法等質空間，$V := L^2([0,1],\mathfrak{g})$ は G のリー代数 $\mathfrak{g}$ に値をもつ L^2 道全体の成すヒルベルト空間を表す．G/K の閉部分多様体 N に対して，逆像 $\Phi^{-1}(N)$ は V の PF 部分多様体となることが知られている．ここで，N と $\Phi^{-1}(N)$ との幾何学的関係を調べることは重要な問題である．

有限次元リーマン多様体の極小部分多様体であって，ある特殊な対称性を持つものがある．具体的には，鏡映部分多様体 (D. S. Leung)，弱鏡映部分多様体 (井川-酒井-田崎)，オースティア部分多様体 (Harvey-Lawson)，アリッド部分多様体 (武富) がある．与えられた等長作用に対して，対称性を持つ極小軌道を決定することは 1 つの興味深い問題である．

3. 主結果 (論文リスト [2], [3], [4])

(a). 平行移動写像の部分多様体幾何. PF 部分多様体 $\Phi^{-1}(N)$ の第二基本形式，形作用素に関するリー代数的明示公式を与えた．それらを用いて，PF 部分多様体 $\Phi^{-1}(N)$ が全測地的となるための必要十分条件を与えた．更に，PF 部分多様体 $\Phi^{-1}(N)$ の主曲率明示公式を与えた．

(b). 平行移動写像の対称性質. ヒルベルト空間内における鏡映 PF 部分多様体，弱鏡映 PF 部分多様体，オースティア PF 部分多様体，アリッド PF 部分多様体を定義し，それらの基本性質を研究した．そして，適切な仮定のもとで,「N が弱鏡映 (resp. アリッド) ならば $\Phi^{-1}(N)$ も弱鏡映 (resp. アリッド) である」ことを示した．更に，G/K が球面であるとき，N のオースティア性が $\Phi^{-1}(N)$ のオースティア性と同値であることを示した．これらの結果を用いて，ヒルベルト空間内の弱鏡映 PF 部分多様体，オースティア PF 部分多様体，アリッド PF 部分多様体の例を多数構成した．

(c). ヒルベルト空間の等質極小 PF 部分多様体. 主結果 (a) と (b) を組み合わせることで，次を示した : 無限次元ヒルベルト空間内には，全測地的でない等質極小 PF 部分多様体が多数存在する．有限次元ユークリッド空間内において，全ての等質極小部分多様体は全測地的となることが知られており (Di Scala)，故に上記結果は有限次元・無限次元部分多様体の一つの決定的差を表すと言える．