研究計画

私が構想している主な研究計画は下記のとおりである．

（1）二元生成 Klein 群の分類問題． 2002 年にブダペストで開催された研究集会で，Agol は 2 つの放物的変換により生成される非自由クライン群の分類定理および放物的生成元対の分類定理をアナウンスしたが，その証明は発表されていない．秋吉宏尚，和田昌昭，山下靖の三氏と共同で 1997 年頃から取り組んでいた Jorgensen 理論の理解と一般化を目指した研究の観点からみると，Agol の定理は極めて自然であるため大いに興味を唆られ，発表後すぐに Agol に連絡を取り証明を理解しようと努めていた．その後，Agol 氏の勧めと激励もあり，証明を完成することを目指したプロジェクトを開始し，今年 2019 年になって，秋吉宏尚，大鹿健一，John Parker，吉田はんの四氏との共同研究で 2 元放物元生成クライン群の分類定理の証明，Donghi Lee 氏および大学院生の相見俊介，坂井俊介の三氏との共同研究で放物的生成元対の分類定理の別証明を与えた（arXiv:2001.09564, arXiv:2001.11662）．穴開きトーラス基本群の型保存表現の像として得られる群，および二つの楕円的変換により生成される群に対しても，この定理の類似が成立すると予想しており，この予想の証明に取り組みたい．

（2）Klein 群の空間の研究． 2 つの放物的変換により生成される群は原点を除いた複素平面をパラメータ空間に持ち，大鹿・宮地の研究により，その中の自由クライン群全体が作る部分空間 $\mathcal{D}_f$ は Riley 切片 $\mathcal{R}$ の閉包に一致し，穴開きアニュラスと同相となる．また，秋吉，和田，山下の三氏と共同研究は，Riley 切片 $\mathcal{R}$ には，本質的に Farey タイル貼りと同型となる自然なタイル貼りが存在することを示唆している．一方，非自由クライン群全体が作る部分空間 $\mathcal{D}_{nf}$ は離散的であり，その集積点集合は D_f の境界になる．秋吉，和田，山下の三氏と共同研究は $\mathcal{D}_{nf}$ を $\mathcal{D}_f$ と結ぶ自然な道があることを主張しており，更に，Gaven Martin 氏との討論をきっかけとして $\mathcal{D}_{nf}$ には「網目構造」とでも呼ぶべきパターンがあることに気づいた．昨年より行っている秋吉氏との共同研究により，双曲的 Dehn 手術の理論の観点から見ること $\mathcal{D}_f$ の補空間には Farey タイル貼りの双対とみなせる自然なタイル貼りが存在し，上述の網目構造はこのタイル貼りの観点から理解でき，（1）で述べた Agol の定理もこの観点から直接的な証明を与えることができる可能性があると予想するに至った．更に，穴開きトーラス基本群の型保存表現の像として得られる群，および二つの楕円的変換により生成される群に対しても，このストーリーの類似が成立すると予想している．以上の予想の解決に向けた取り組みを行いたい．

（3）3 次元多様体のファイバー曲面とヘガード曲面の類似の追求． 3 次元多様体のヘガード曲面とファイバー曲面は，前者は圧縮不可能，後者は圧縮可能であり，全く相異なる性質を持つ．しかしながら，1981 年出版の論文で与えた分岐バーチャルファイバー定理は，ヘガード曲面とファイバー曲面の間には，直接的な関係があることを示しており，これは，もっと深い類似の表れであると予想している．円周上のファイバー束に対しては，そのモノドロミーが生成する巡回群としてモノドロミー群が定まるが，3 次元多様体 M のヘガード曲面 Σ に対しても，その類似としてモノドロミー群 $\mathcal{M}(M,\Sigma)$ が定る．分岐バーチャルファイバー定理で構成される曲面束のモノドロミーは，このモノドロミー群 $\mathcal{M}(M,\Sigma)$ の特別な元である．このことを出発点として，分岐バーチャルファイバー定理におけるヘガード曲面の複雑度（特に Hempel 距離）とファイバー束のモノドロミーの複雑度（特に曲線複体への作用の安定移動距離）の間の関係を調べたい．また，Donghi Lee 氏との一連の共同研究により，2 橋絡み目の（ヘガード曲面の一種である）2 橋曲面のモノドロミー群は，様々な良い性質を持つこと，そして 2 橋曲面に対する McShane の等式の類似を証明した．一般のヘガード曲面に対して，どこまでその様な性質が成立するかを調べ，特に（秋吉，宮地の両氏との共同研究で，Bowditch の研究を一般化することにより与えた）曲面束に対する McShane の等式の類似と同様に，一般の橋曲面に対して McShane の等式の類似が存在することを示したい．また，大鹿氏との共同研究で証明した定理「Hempel 距離が十分大きければ，向き保存部分群 $\mathcal{M}^+(M,\Sigma)$ は自然な自由積分解を持つ」がモノドロミー群 $\mathcal{M}(M,\Sigma)$ そのものに対しても成立することを証明したい．