今後の研究計画

阿蘇　愛理

私は今後の研究内容として, 以下の 2 つのトピックを考えている.

トピック 1. 6 交点以下の双曲結び目に対するねじれアレキサンダー多項式の極限を求める

これまでの研究成果に書いたように, 私は合田の与えた式 [1] の複素化を考えており, 手始めに 6 交点以下の双曲結び目に対してそれらのホロノミー表現から得られる $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-表現に関するねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動を調べた. その研究によって, n を大きくしていくにつれて式の実部が双曲体積に, 虚部がチャーン・サイモンズ不変量の $2\pi^2$ 倍に近づくのではないかという予想を得たが, 現時点では虚部がチャーン・サイモンズ不変量に収束することは示せていない. そのため, 6 交点以下の双曲結び目に対して対象の式の極限を実際に求めたいと考えおり, この計算の方法として以下の 2 つの案を考えている.

1. 色付きジョーンズ多項式の体積予想の複素化における, 結び目 $6_3, 8_9, 8_{20}$ 等の証明方法 [2] を参考にする.
2. 2 橋結び目に対しては, ポテンシャル関数のヘッセ行列とライデマイスター・トーションの関係が大槻–高田によって知られているので [3], それを参考にしてねじれアレキサンダー多項式とポテンシャル関数の関係を得る. ポテンシャル関数と複素体積は密接な関わりがあるため [4], それを利用すれば極限値だけでなく, より一般化した等式が得られる可能性もある.

トピック 2. 樹下・寺阪結び目とその一般化に対するホロノミー表現を求める

樹下・寺阪結び目はアレキサンダー多項式が自明となるような 11 交点の結び目である. また, その一般化となる結び目の族の存在も知られており [5], 私はこれらの結び目のホロノミー表現を求め, それから得られる $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-表現に関するねじれアレキサンダー多項式の振る舞いを調べてみたいと考えている. 一般化した樹下・寺阪結び目は結び目の無限族であり, 結び目の無限族に対して組織的にホロノミー表現を求めることは一般に困難であるが, $(-2,3,2n+1)$ プレッツェル結び目のような結び目の図式を持つことが知られているため, [6] と同様の手法によりホロノミー表現を得ることが可能であると考えている.

参考文献

[1] H. Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Jpn. Acad. Ser. A **93** (2017), 61–66.

[2] H. Murakami, J. Murakami, M. Okamoto, T. Takata, Y. Yokota, *Kashaev's conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links*, Experiment. Math., **11** (2002), 427–435.

[3] T. Ohtsuki, T. Takata, *On the Kashaev invariant and the twisted Reidemeister torsion of two-bridge knots*, Geom. Topol. **19** (2015), 853–952.

[4] Y. Yokota, *On the complex volume of hyperbolic knots*, J. Knot Theory Ramif. **20(7)** (2011), 955–976.

[5] S. Kinoshita, H. Terasaka, *On unions of knots*, Osaka Math. J., **9** (1957), 131–153.

[6] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of* $(-2,3,2n+1)$*-pretzel knots*, Hiroshima Math. J., **50** (2020), 43–57.