

## 今後の研究計画 (2021年4月～)

2021年3月11日

古谷賢朗

楕円型作用素の大域的な研究は多様体論と解析学に多くの深い知見をもたらした。今後の研究では、楕円型を含み主に劣楕円型作用素の大域的現象の研究を行う予定である。Laplace-Beltrami 作用素や Dirac 作用素がそれぞれ多様体の幾何構造に自然に付随する 2 階楕円型作用素、1 階楕円型作用素であるのに対して、ここでは多様体の sub-Riemann 構造とそれに付随する 2 階劣楕円型微分作用素が研究の中心である。この幾何構造 (= sub-Riemann 構造) は接束に bracket 生成的な部分束の存在を意味し、その対極の構造である葉層構造については古くから研究されているが、多様体論と密接に関連した幾何学的解析学的な研究がこれまで未開拓であることも研究するに十分意義があると考えている。

接触多様体やベキ零 Lie 群はその構造を持つ多様体の代表例であり、Riemannian submersion の全空間はその両方の構造を持つ場合がしばしばあり研究対象は豊富である。又葉層構造の場合は、横断的楕円型作用素の概念は定義出来るが、解析的側面から見ると構造を直接反映した微分作用素は存在しない。一方、sub-Riemann 多様体上には構造の性質を反映した 2 階劣楕円型微分作用素 (= sub-Laplacian) が存在し、Riemann の場合の Laplacian との対比においても研究するに値する十分な意味を持つ。この作用素は Hörmander による sub-elliptic estimate (劣楕円型性) を満たすので、スペクトルの基本構造は楕円型と同じであるが、特性多様体が存在することより従来の位相的レベル (K-理論) の枠組みだけではない新たな現象の可能性や、古典的によく知られた多様体が非自明なこの構造を持つかの研究も含め、解析的には Laplacian の持つ性質の類似の研究 (例えば、Weyl law の証明や熱核構成等) も多々あり、その困難さの中に楕円型作用素には見られない現象の更なる探究を行う。

昨年度はコロナ禍で予定していた共同研究者の招聘が出来なかったが今年度は終息し、実現に努力し、又自身が訪問滞在 (ドイツ、ノルウェー、デンマーク) し共同研究の進展が出来ることを期待している。

より具体的には「楕円型作用素から劣楕円型作用素へ」の題目の元今後数年間は以下の研究 (a) ~ (e) を予定している:

(a) ベキ零 Lie 群は良い (= equi-regular) sub-Riemann 構造を持つ多様体の典型例である。その中で Clifford 代数に付随するベキ零 Lie 環 (= pseudo H-type Lie 環) の基本的な性質 (Lattice の存在、分類、自己同型群の決定) の研究を行ってきた。次に integral lattice の分類や、この compact nilmanifolds の Laplacian、sub-Laplacian の spectral zeta 関数に関わるより様々な具体的な研究を行う。

(b) A. Weinstein の Eigenvalue Theorem の sub-Laplacian version が成り立つはずであると予想していて、完全な証明を一応の形では得たが、一般論でなく Maslov 量子化条件を満たす様々な Lagrangian submanifold の構成を行う。より具体的には、sub-Laplacian の陪特性流が完全積分可能でないときを主に扱い、トーラス以外のいろいろな Lagrangian submanifold を見つけることを目標にする。そのために submersion、fiber bundle、principal bundle のもとの Lagrangian submanifold の functorial property を論じ、Lagrangian submanifold の新しい構成を行う。

(c) 余接束、或いはそれから zero section を除いたところに Calabi-Yau 構造の構成と、幾何学的量子化作用素 (所謂 Bargmann type transformation) の構成。この問題は前項の問題とも関係するが、Maslov 量子化条件の中で、陪特性流不変測度の存在を保障してくれる性質でもあり多様体は限定されている。特に長年の懸案であった Cayley 射影平面の場合を今年度は完成し、その応用についても検討する。

(d) Conic singularity を持つ多様体上の sub-Laplacian の研究を symbolic calculus の視点から始める。

(e) Lie 群は不変 sub-Riemann 構造を持っているが、特に compact 対称空間がいつも sub-Riemann 構造を持つかは一般的には不明である。本研究では対称空間に対して Lie 環構造を通じて構成可能な sub-Riemann 構造の存在を個別に調べ、出来れば分類も試みる。