<u>これまでの研究成果</u>

2021 年 3 月 11 日
古谷賢朗

19 世紀以来楕円型微分作用素の研究は Dirichlet 問題等を一つの出発に物理的問題との関連の中で多岐に亘り研究され、Hilbert 空間論に続き、関数の革新的取り扱い (≅ 超関数論的枠組み＝関数を観測対象と見る) の枠組みのもと急速に発展し、微分作用素を含み擬微分作用素、更に Fourier 積分作用素の理論にも発展し、この枠組みの元、多様体構造とそこに自然に存在する線形 (楕円型及び劣楕円型 (擬)) 偏微分作用素と関連する幾何学的研究を行って来た。ここ 10 数年は特に劣楕円型作用素に関する幾何学的 (= sub-Riemann 構造) と解析学的（= sub-Laplacian) な研究を中心に行い、概ね以下のテーマで研究を行ってきた（以下関連する論文 (査読付き) を「論文リスト」の番号 [∗] で示す)**:**

(1) Spectral flow と Maslov index の研究
(2) 幾何学的量子化の研究
(3) Laplacian と sub-Laplacian に関する研究
  (3-1) 熱核と spectrum に関連する研究
  (3-2) sub-Riemann 構造に関する研究

(1) は Floer の横断的に交わる Lagrangian submanifold に内在する境界値問題に関しての spectral flow と Maslov 指数の関係性と吉田氏により発見された manifold partition から出て来る spectral flow formula の論文を出発にして、無限次元 symplectic Hilbert 空間 (具体例としては対称作用素の自己共役楕円型境界条件の空間として出て来る) の Lagrangian subspaces の空間の位相不変量の一つとしての Maslov index の研究の成果 を

<u>Kenro Furutani</u>, *Fredholm-Lagrangian-Grassmannian and the Maslov index*, Journal of Geometry and Physics、Vol. 51, No. 3(2004), pp. 269–331,

にまとめとして発表した (論文リストの [32] が上記論文)。具体的な楕円型作用素の自己共役境界条件は Cauchy data space が Lagrangian subspace になることとは同値であるが、吉田氏や Floer の結果を含みもっと一般的に Maslov index と spectral flow が等価であることを関数解析的な方法で示した。ここで重要なことは spectral flow も Maslov index も loop だけでなく path の homotopy 類に対する不変量であることの取り扱いを J.Phillips のアイデアを元に明確にした事である。関連する内容の論文は [31],[33], [36], [38],[39],[40],[44],[46] である。

(2) に関しては、polarization の pairing の方法により Bargmann 変換に当たる変換を構成することを目標に、余接束 $\backslash\{0\} := T_0^*(M)$ (= punctured cotangent bundle) に Kähler 構造と更に Calabi-Yau 構造が入る例を探すことから初め、球面以外に射影空間 $M = P^n\mathbb{C}$, $P^n\mathbb{H}$, $P^2\mathbb{O}$ の $T_0^*(M)$ に Kähler 構造を構成し、$P^2\mathbb{C}$ 以外はその標準直線束の各点で消えない大域的正則切断を具体的に構成しそれらの pairing を求め、Bargmann 変換に対応する作用素を構成した。球面の場合は J. H. Rawnsley によって構成されている。元々の Bargmann 変換 ($M = \mathbb{R}^n$ と $T^*(M) = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$) は unitary 作用素であるがここで構成した作用素は同型になっているが unitary 作用素ではない。

Cayley 射影平面 $P^2\mathbb{O}$ に対しては $T^*(P^2\mathbb{O})\backslash\{0\}$ に Kähler 構造が入り Calabi-Tau 構造の存在まで出来た ([25],[30],[35],[37],[42],[43])。

(3) はベキ零多様体の熱核を具体的に構成することを目標に関連する研究を行った。成果として以下を得た。

(i) Heisenberg 多様体や球面の Laplacian, sub-Laplacian の zeta-reguralized determinant を具体的に決定をした ([21], [22], [23],[26].[34])。

(ii) [24] では具体的な sub-Laplacian に関係した事柄を 100 ページあまりにまとめた。又これはそれ以後の W. Bauer 氏 (Hannover 大学教授)、C. Iwasaki 氏 (兵庫県立大学) との３人でのこの話題での共同研究の出発でもある。又主に sub-Laplacian の熱核構成を様々な角度から論じた単行本を O. Calin, D-C.Chang, K. Furutani, C. Iwasaki の共著として Birkhäuser より出版した。

(iii) Higher step の Grushin 作用素に関する研究：2 変数 higher step の Grushin 作用素の熱核の構成要素の一つである作用関数を構成した ([20])。一般次元の higher step の Grushin 作用素の Green 関数を特殊関数を用いて具体的に構成した ([16], [17])。ここで言う higher step Grushin 作用素は higher step のベキ零 Lie 群上の不変な sub-Laplacian を商空間に descend して出てくる 2 回の劣楕円型作用素である。

(iv) Gromoll-Meyer exotic 7-sphere に co-dimension 3 の sub-Riemann 構造が存在することを示した ([11])。又 [10] では sub-Riemann 構造に内在する Popp measure の研究を行った。

(v) sub-Riemann 構造を持つ多様体の具体例でもある、ベキ零 Lie 群 (環) に関しての研究。特に Clifford 代数に付随する 2-step ベキ零 Lie 環 (pseudo H-type Lie 環と呼んでいる) の分類と lattice の存在、自己同型群の決定の研究を行った ([2], [3], [4], [6], [7], [12], [14], [18])。