これまでの研究の概要

研究のテーマはポテンシャル論の応用としての多項式近似の理論である. 一般に, $\mathbb{R}$ 上の多項式は無限遠点の近くで正または負の無限大に発散するため, $\mathbb{R}$ 全体での関数の近似を扱うにあたっては不便を生ずる. そのため, 任意の非負の整数 n に対して $\lim_{|t|\to\infty} t^n w(t) = 0$ となるような適当な重み関数 w を乗じて考えなければならない. これに関して以下の問題が知られている.

"$1 \le p \le \infty$ とする. 重み w に対して $\mathbb{R}$ 上の関数 f が $fw \in L^p(\mathbb{R})$ をみたすとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|(f - P_n)w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{A}$$

となるような多項式の列 $\{P_n\}$ は存在するか?" 本研究では重み w は滑らかな $\mathcal{F}(C^2+)$ と呼ばれるクラスに属するものに限定して扱うものとする. 重み w を $w(t) = \exp(-Q(t))$ と表し, $T(t) := tQ'(t)/Q(t),\ (t \ne 0)$ と定義する. T の挙動によって $\mathcal{F}(C^2+)$ に属する重みは 2 種類に分類され, T が有界のとき w を Freud 型と呼び, T が有界でないとき w を Erdős 型と呼ぶ. 本研究では Erdős 型を主にに扱う.

1. **de la Vallée Poussin 平均の収束性**: 関数 f の de la Vallée Poussin 平均 $v_n(f)$ は $v_n(f)(t) := \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(t)$ によって定義される. ここで $s_m(f)(t)$ は f の重み w に関する直交多項式の Fourier 部分和である. f の近似度を $E_{p,n}(w;f) := \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|(f - P)w\|_{L^p(\mathbb{R})}$ で定義する. ここで $\mathcal{P}_n$ は次数が高々n 次の多項式全体である. さらに $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ について或る $c > 0$ に対して $T(a_n) \le c\,(n/a_n)^{2/3}$ であることを仮定する. 記号 a_n とは MRS 数と呼ばれる w から導かれる量である. このとき定数 $C \ge 1$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $fw \in L^p(\mathbb{R})$ のとき以下が成り立つ:

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w;f). \tag{B}$$

   これまでに (B) の右辺が $n \to \infty$ のとき 0 に収束するふたつの条件を示した. それは w がより滑らかな部分集合 $\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ に属しかつ $T^{1/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ のとき, または f が絶対連続で $f'w \in L^p(\mathbb{R})$ のときである. 即ちこのとき f の de la Vallée Poussin 平均 $v_n(f)$ は (A) をみたす具体的な多項式のひとつである. さらに f がより滑らかであれば $v_n(f)$ は f だけでなくその微分が f' に対しても近似を与えることも示した.
2. **Fourier 部分和の一様収束**: これとは別に Fourier 部分和 $s_n(f)$ が f に $\mathbb{R}$ 上で一様収束する条件を示した: $w \in \mathcal{F}_\lambda(C^3+)$, $0 < \lambda < 3/2$ とし, f は連続かつ $\mathbb{R}$ の任意の. 有界閉区間上で有界変動とする. f が $\int_{\mathbb{R}} w(t)|df(t)| < \infty$ をみたすとき次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(f - s_n(f))wT^{-1/4}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

3. **Lagrange の補間多項式**: w_ρ を $w_\rho(t) := |t|^\rho w(t)$, $(\rho > 0)$ と定める. $f \in C(\mathbb{R})$, に対し $\{t_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$ に関する Lagrange の補間多項式を $L_n(f)(t)$ とする. 但し $\{t_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$ は w_ρ に関する n 次の直交多項式の零点である. $L_n(f)(t)$ が f に重み w_ρ に関して L^2 ノルムで収束する条件を示した: $f \in C(\mathbb{R})$, $\beta > 1/2$ とする. $|(1+t^2)^{\beta/2}w_\rho(t)f(t)| \to 0(|t| \to \infty)$ をみたすとき次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty} \|(L_n(f) - f)w_\rho\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0. \tag{C}$$

   また, $1 < p < 2$ の場合, $\beta > 1/p$ とし, $|(1+t^2)^{\beta/2}T^{1/2}(t)\Phi^{-1/4}(t)w_\rho(t)f(t)| \to 0(|t| \to \infty)$ をみたすとき (ただし $\Phi(t) := (1+Q(t))^{-2/3}T^{-1}(t)$), 上記の式 (C) の $1 < p < 2$ の場合を証明できた.