今後の研究計画 (岩井雅崇)

代数多様体 X の接束 T_X が正値性を持つとき, X の構造が制限されることはこれまでの研究 A, 研究 B で解明できた. また Cao らの研究によって, 反標準因子 $-K_X$ が正値性を持つときの X の構造もすでに分かっている. 以上より, T_X や $-K_X$ が正値性を持つ滑らかな代数多様体に関しては構造がすでに解明されている.

一方で, 代数多様体の分類理論である極小モデル理論においては, 滑らかな代数多様体のカテゴリーを考えるだけではうまくいかず, 自然と特異多様体 (特異点を持つ多様体) を考える必要がある. ただ特異多様体を調べる場合, 特異多様体は複素多様体ではないため, これまで用いた複素幾何の手法をそのまま使うことはできない.

その問題点を解決するために, Campana は「orbifold を用いた特異多様体の研究手法」を提唱している. これは「特異多様体に orbifold の構造を入れ, 従来の複素幾何の手法を orbifold に拡張することで, 特異多様体を調べる」というものである. 今後の研究では, Campana の提唱に基づき, 「orbifold の視点から特異多様体の幾何学的な構造」を調べる. 以下にその詳細を述べる.

研究 C. 接束が正値性を持つ特異多様体の構造について

研究 A から, 接束 T_X が擬有効であるならば X は有理連結多様体と Abel 多様体から構成されるのであった. 一方, 特異多様体に対しては有理連結性をうまく定義するのが難しく, 滑らかな場合の理論をそのまま適応することができない. そこで研究 C では, 特異多様体に対して適切な有理連結性を定義し, 接束が正値性を持つ特異多様体の構造定理を示す.

適切な有理連結性に関しては Campana がスロープ有理連結性を提唱している. これは有理連結性を orbifold に対して一般化した概念である. この観点と研究 A から, 接束 T_X が擬有効な特異多様体はスロープ有理連結多様体と Abel 多様体から構成されると予想される. Campana が提唱するスロープ有理連結性の理論を応用し, 研究 B で用いた葉層構造に対する手法を orbifold 上に拡張することで, 研究 C を遂行する.

研究 D. orbifold 基本群を用いた特異多様体の基本群の研究.

Wang は, $-K_X$ がネフである特異多様体 X の構造定理を, 基本群にある仮定を置いた場合において確立した. その仮定とは「$-K_X$ がネフである特異多様体 X の非特異集合 X_{reg} の基本群 $\pi_1(X_{reg})$ が多項式増大である」というものである. Wang はこの仮定が常に成り立つと予想している. 研究 D ではこの予想について取り組み, $-K_X$ がネフである特異多様体の構造定理を完成させる.

方針としては, X に適切な orbifold の構造 $\mathcal{X}$ を入れ, 「$-K_{\mathcal{X}}$ がネフならば, orbifold 基本群 $\pi_1^{orb}(\mathcal{X})$ が多項式増大である」ことを示す. まず orbifold 上で Monge-Ampere 方程式を解き, Ricci 曲率が概半正なケーラー計量を構成する. そして orbifold 上の Bishop-Gromov の定理を応用することで, orbifold 基本群 $\pi_1^{orb}(\mathcal{X})$ が多項式増大であることを示す.