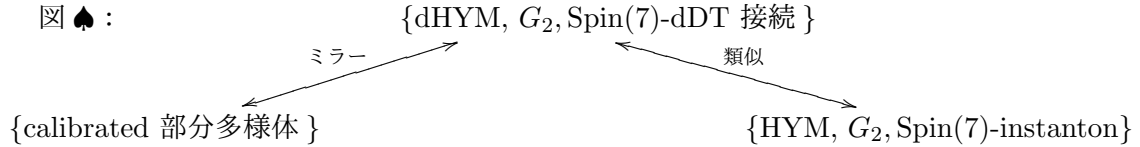


今後の研究計画

G_2 幾何の重要な問題の 1 つに、 G_2 -instanton または associative 部分多様体を「数えて」 G_2 多様体の不変量を定義できるか? という問題がある。(Spin(7) 幾何に対しても類似の問題がある。) そのためには、 G_2 -instanton, associative 部分多様体の特異点の深い理解が必要になる。研究成果の背景より、以下のような類似性があった。



そして研究成果 (III) により、 G_2 -dDT 接続のモジュライ空間は、 G_2 -instanton, associative 部分多様体のモジュライ空間と類似の性質を持つことが確認された。それゆえに、 G_2 -dDT 接続の研究は上の問題に新たな視点を与えることが期待される。私は $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続の特異点を研究し、上の問題の突破口をみつきたい。そしてこの $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続の研究に基づき、図 ♠ の他の 2 つに関する新しい性質をみつけることも目指す。

[研究 1] コンパクト性定理 : コンパクト性定理とは、ある汎関数が一様有界な列が与えられたとき、部分列をとれば有限個の点を除いて収束し、その有限個の点では「バブル」が生じるというような主張をいう。これはモジュライ空間のコンパクト化に重要である。 $G_2, \text{Spin}(7)$ -instanton と (ある種の) associative 部分多様体に対しては既に示されている。図 ♠ の類似性から $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続に対しても同様に定理の成立が予想される。

一番の問題は、最初の汎関数の設定である。どの汎関数が適切かは現時点では不明だが、(i) 通常の Yang-Mills 汎関数、(ii) 部分多様体の “3-energy” のミラーを候補として考えている。これらは上 2 つの場合の汎関数に対応するからである。まずこれらの汎関数に対し、コンパクト性定理のための基本的な性質 (特異点解消定理など) が成り立つかどうか調べる。他にも部分多様体側の汎関数の「ミラー」等様々な汎関数を調べる。そして適切な汎関数が見つかれば、上 2 つの手法を織り交ぜつつ定理の証明を目指す。また associative の場合は p 調和写像とも関連しているので、その方面からの研究も考える。

[研究 2] 平均曲率流の「ミラー」 : 部分多様体の通常の体積の「ミラー」として、接続の「体積」が導入できる。(物理では Dirac-Born-Infeld (DBI) action と呼ばれる。) この勾配流 (以下「ミラー MCF」と呼ぶ) の研究を行いたい。これは部分多様体の平均曲率流 (MCF) のときのように、特異な $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続 (モジュライ空間の境界) を調べるのに有用と思われる。MCF の研究は多くあり、ミラー MCF でも同様の結果が期待される。まずこの flow の短時間存在を示したい。これを示すために、flow が放物型偏微分方程式に帰着できないか考えている。(通常の MCF はこれが可能。) こうなれば、短時間存在は示せる可能性が高い。上で発展させた研究の知識や、常套手段の Deturck's trick、あるいは更に深く Nash-Moser の陰関数定理の適用を考え証明を試みる。

また最近、(calibrated 部分多様体が極小部分多様体になるように) $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続が「体積」を最小にすることがわかった。そこで $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続の安定性、つまりそれらの十分近くからミラー MCF を流すと $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続に収束するか調べる。方法としては、ラグランジュ MCF に関する H. Li の手法の類似を考えている。つまり、線形化方程式の第 1 固有値が十分大の仮定のもと、ミラー平均曲率の L^2 ノルムが指数関数的減衰すること等を示す。ミラー対応から上は成り立つと予想しているが、適宜安定性が知られている他の flow (G_2 多様体上の Laplacian flow 等) も参照しつつ研究を行う。

もし [研究 2] が想定以上に早く進めば、更に通常の平均曲率流の類似を調べることを計画している。例えば、ミラー平均曲率流の解は爆発するか、爆発するならば、爆発の仕方によって特異点を分類してそれぞれの性質を調べられるか? 等について考えたい。