

## これまでの研究成果のまとめ

### ◆背景

・ **calibration** : calibration は、Harvey-Lawson により導入されたリーマン多様体  $(M, g)$  上のある特別な  $k$  次閉微分形式である。calibration があると、ある  $k$  次元極小部分多様体 (**calibrated 部分多様体**) が定義できる。この概念はホロノミー群と相性がよい。リーマン多様体がある特定のホロノミー群  $\text{Hol}(g)$  を持つときには、自然な calibration を持つ。以下にいくつか例を示す。私は特に  $G_2, \text{Spin}(7)$  の場合に興味がある。

$\text{Hol}(g)$ (C)	$U(n)$	$SU(n)$	$G_2$	$\text{Spin}(7)$
$(M, g)$	Kähler 多様体	Calabi-Yau 多様体	$G_2$ 多様体	$\text{Spin}(7)$ 多様体
calibrated 部分多様体 $Y$	複素部分多様体	特殊ラグランジュ部分多様体	(co)associative 部分多様体	Cayley 部分多様体

・ **ミラー対称性** : calibrated 部分多様体の「ミラー」は、上のようなホロノミー群をもつ多様体上の複素エルミート直線束の (ある PDE をみたく) エルミート接続である。特殊ラグランジュのミラーは変形エルミート・ヤンミルズ (**dHYM**) 接続、(co)associative のミラーは  $G_2$ -変形 **Donaldson-Thomas** ( $G_2$ -**dDT**) 接続、Cayley のミラーは  $\text{Spin}(7)$ -変形 **Donaldson-Thomas** ( $\text{Spin}(7)$ -**dDT**) 接続とよばれる。またこれらは、定義方程式の類似性からエルミート・ヤンミルズ (HYM) 接続や  $G_2, \text{Spin}(7)$ -instanton といったよく研究されている接続の類似ともみなすことができる。

### ◆これまでの研究成果

#### (I) calibrated 部分多様体に関する研究 :

(Ia) **具体例の構成** : 具体例は特異点の局所モデルを提供し、特異点解消などに非常に重要である。しかし例の構成には非線形偏微分方程式を解く必要があり、これは一般に難しい。[論文 1] では、Joyce の運動量写像の手法を応用し、ある一般のトーリック多様体内に特殊ラグランジュ部分多様体の例を構成した。[論文 2,9,14] では、Lie 群の対称性を用いてある漸近的に錐な  $G_2$  多様体の coassociative 部分多様体を構成した。等質なものを分類し、多くの余等質性 1 の例を構成した。特に錐特異点を持つ例、その特異点解消の例を構成した。

(Ib) **calibrated 錐部分多様体の具体的な変形の研究** : 錐特異点の解析には calibrated 錐部分多様体の変形を調べる必要がある。非コンパクトな場合の変形理論は一般にないので、まず具体例を調べた。[論文 4, 6, 13] では、等質な Cayley 錐多様体の無限小変形 (変形の「1 次近似」) を表現論を用いて調べ、いくつかの場合にモジュライの局所的構造を解明した。更に [論文 7] では変形の「2 次近似」を計算し、モジュライの様子をより明らかにした。

(II)  $G_2, \text{Spin}(7)$  多様体の位相とモジュライ空間の研究 : [論文 8,10] では Frölicher-Nijenhuis bracket という代数的構造を用いて  $G_2, \text{Spin}(7)$  多様体を調べた。[論文 11] ではこれらをより発展・一般化し、 $G_2, \text{Spin}(7)$  構造が入るための新しい位相的障害を発見した。[論文 12] では、様々な幾何構造のモジュライ空間の共通の性質を発見し、その応用として  $G_2$  構造のモジュライ空間上の 2 つの自然な計量に関する完備化は異なることを示した。またリーマン計量の空間上の Ebin 計量を共計変形した際の、完備化の構造の違いを調べた。

(III) **dHYM,  $G_2$ -dDT 接続のモジュライ理論** : [論文 16] では、新しいエルミート構造、 $G_2$  構造を導入することで、dHYM,  $G_2$ -dDT 接続の変形はある楕円型複体の部分複体で記述できることを示した。更に dHYM 接続の場合には、モジュライ空間は滑らかな向きづけ可能有限次元多様体になることを示した。 $G_2$ -dDT 接続の場合も、 $G_2$  構造を摂動すれば、そうなることを示した。[論文 18] では、 $\text{Spin}(7)$ -dDT 接続に対して類似の結果を示した。特殊ラグランジュ、associative, Cayley 部分多様体のモジュライ空間も同様の性質を持つことから、ミラー対応によってモジュライ空間の性質が確かに保たれることがわかった。