研究計画書

永田 義一

これまで私は多変数複素解析を研究してきた. 特に, 複素ユークリッド空間内の領域の正則自己同型群に関して成果を上げているが, その研究の中にいくつか未解決の問題がある. その観点から今後の 2 つの目標を, またその他に直近まで取り組んでいた目標を 1 つ述べる.

正則自己同型群の離散部分群の研究

論文 [2], [3] では次の領域

$$D^{p,q} = \{(z_1, \ldots, z_{p+q}) \in \mathbb{C}^{p+q} : -|z_1|^2 \cdots - |z_q|^2 + |z_{q+1}|^2 + \cdots + |z_{p+q}|^2 > 0\}$$

を考えた. ここで, p, q は正の整数. この領域は正則自己同型群が推移的に作用する等質領域である. [2], [3] では $\mathrm{Aut}(D^{p,q})$ の正則自己同型群を決定した. そして, $D^{p,q}$ $(p > q)$ の商空間がコンパクトにならないことを示した. 一方で, $q \geq p$ であるときの離散群の性質は研究できていないので, この点を明確にしたい. 予想する結論としては, $p > q$ のときと同様に離散部分群は非常に小さく, 商空間はコンパクト空間にはならないと思えるが, それを示す手法を模索している.

正則自己同型群の Lie 群構造と core の研究

$\mathrm{Aut}(M)$ を複素多様体 M の正則自己同型群とする. この $\mathrm{Aut}(M)$ は一般には Lie 群にはならない. 例えば $M = \mathbb{C}^n$, $n > 1$, の時は巨大な位相群であり多様体ではない. 一方, M が有界領域の時は $\mathrm{Aut}(M)$ は常に Lie 群構造を持つ. そこで, 正則自己同型群が Lie 群構造をいつ持つかが問題になるが, 非有界領域の場合はまだ完全に理解されていない. 最も重要なクラスである強擬凸領域や有限型の領域に対しては正則自己同型群が Lie 群構造を持つことを示した [4]. そこでは Bergman 擬計量を用いて定式化をおこなったが, その方法で完全に解決したわけではなく, 複素多様体への一般化なども未解決である.

また [4] では, core $\mathfrak{c}'(\Omega) \subset \Omega$ と呼ばれる領域 Ω の部分集合の研究が上記の問題に関連することを示した. Core の研究は Wuppertal 大学の人々によって, ここに書いたこととは違う別の動機によって研究が進められていたが, まだ多くのことは知られていない. この性質についても研究を進めたい.

ハルトークス型の正則関数の拡張定理

これは, 自己同型群の研究とは関係がないが, 多変数関数論の出発点となったハルトークスの定理の変化形といえるものについて最近研究 [5] をしてきたのでその内容について述べたい. ハルトークスの定理とは, 2 次元以上の複素ユークリッド空間の領域 Ω とその中のコンパクト集合 K を考えると, $\Omega \setminus K$ が連結であればその上の正則関数は Ω 上に正則に拡張される, というものである. 簡単にいえば, 領域の境界の近傍の正則関数は領域全体に拡張される. ここで, 境界の部分集合の近傍の正則関数を考えると, 一般にはそれ以上拡張できないのは当然であるが, ある凸性の条件を加えると, ハルトークスの定理のように領域全体に拡張される. 論文 [5] で述べた条件には改良されなければならない点が残っており, このことは共同研究をして決着させたい.

注) [2], [3] などの番号は, 論文リストの査読付き論文の番号に対応しています.