研究計画

海外の共同研究者 Dariusz Partyka (The John Paul II Catholic University of Lublin, Poland) とは、頻繁に研究連絡をとりあっている。また、関連する分野の研究を行っている David Kalaj (University of Montenegro, Montenegro), Jianfeng Zhu (Huaqiao University, P.R.China) 等とも研究連絡をとりあい、機会をみて訪問したり、海外の研究集会に参加し、研究成果の発表を行う。また、10〜12 名の研究者グループにより、山口大学で平成 23 年 (2011 年) から毎年行っている研究集会「リーマン面論の展望」に今後も参加する。そこでは、等角写像、擬等角写像、調和な写像等に関する研究成果の交流を活発に行う。

具体的には、下記の (1),(2),(3) のような研究を推進する。

(1) 等温助変数で表示された極小曲面の底平面への射影は、単射で調和な写像である。逆に、単射で調和な写像がある条件をみたせば、極小曲面に持ち上げられる。藤野 (名古屋大学) とは、単射で調和な写像の研究及び極小曲面の研究のそれぞれの進展の関連性を詳しく解析し、その応用を追求する。また、調和な写像の 1 paramer 族による変形が、 D. Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings and close to convex domains, Filomat 24(2010), no.1, 63-68. において取り扱われている。私と共同研究者 Partyka は、 A simple deformation of quasiconformal harmonic mappings in the unit disk, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.37(2012),539-556. において、その変形が擬等角写像論において重要な役割を果たす正則運動に対応する変形とみなせることに着目し、その変形の性質を論じる途上で、像領域を凸領域から α-convex な領域に一般化して議論出来ることに気付いた。その結果、単位円板から凸領域の上への向きを保つ単射で調和な写像の正則部分は単射であるという J. Clunie と T. Sheil-Small の結果 (Harmonic univalent functions, Ann, Acad. Sci. Fenn.Math. 9(1984), 3-25) を系として導ける結果をも得ている。調和な写像の擬等角性という視点からの考察により、Clunie と Sheil-Small とは全く異なる手法による証明を与え、単射で調和な写像 F の正則部分である単射な正則関数と F との関連性を解析している。ここで得ている結果、手法をもとに、逆に、単射な正則関数から単射で調和な写像を誘導できるための条件を求めるという新たな問題を考察する。さらには、像領域を水平方向に凸な領域等に一般化した場合に、単位円板で向きを保つ単射で調和な写像の正則部分の単射性はどうなるかを考察し、擬等角で調和な写像の変形についての我々の研究への応用を検討する。

(2) 擬等角で調和な写像の研究において、擬対称関数 f の $a.e.$ 微分 f' の共役関数 (Hilbert 変換) やコーシーの特異積分が、f の調和拡張の種々の特性に密接に関係してくることが知られている。f' の共役関数やコーシーの特異積分の特性により擬対称関数 f を分類して、その調和拡張の特性及び擬等角性を探求していく。この手法は、調和拡張の正則部分

の微分と反正則部分の複素共役関数の微分がどのような種類の Hardy 空間等に属すかによって分類して考えることにも対応するが、本研究への適用を目指して、Hardy 空間論の研究手法、既知の結果をも分析する。

(3) 私は、Partyka との共同研究により、擬等角で (ユークリッド計量に関し) 調和な写像に対しこれまでに諸結果を得てきたが、次のように進展をはかることを目指す。私と Partyka が、像領域が有界な凸領域の場合に示した Heinz 型の不等式について、像領域を境界が長さを持つジョルダン領域や α-convex な領域に一般化した場合に、どの程度有効であるかを考察する。また、像領域を境界が長さを持つジョルダン領域に一般化した場合にも調和な写像の擬等角性の特徴付けの問題を考察し、擬等角写像論において重要な役割を果たす正則運動の研究への応用を追求する。さらには、これらの研究成果のアナロジーが、擬等角で双曲計量に関し調和な写像に対してどの程度有効かを考察する。また、Douglas-Dirichlet 積分の変分問題における Gerstenhaber-Rauch 原理等の理論で現れる正則二次微分に関連する種々の計量に関する調和な写像に対しても、対応する諸結果のアナロジーがどの程度有効かを考察する。