研究成果

複素平面の単位円板$\mathbb{D}$上の単射で調和な写像は、極小曲面の研究者の研究対象の一つであるとともに、等角写像と類似性をもつ写像として、1980年代半ば以降から活発に研究されてきた。調和な写像の研究の進展とともに、調和性に加えて擬等角性を併せ持つ擬等角で調和な写像の研究への関心が次第に高まっている。1990年代の後半頃から、私は、D.Partyka (The John Paul II Catholic University of Lublin, Poland) との共同研究により、調和な写像に関する Heinz 型の不等式、Schwarz 型の不等式等の種々の特性と擬等角性に関する研究を行ってきた。

単位円$\mathbb{T}$の向きを保つ自己位相同型fの調和拡張 (Poisson 積分) として得られる調和な写像Fは、Radó-Kneser-Choquet の定理により、単位円板$\mathbb{D}$から$\mathbb{D}$の上への微分同相写像を与える。この調和拡張が擬等角であるための必要十分条件について、論文
A note on non-quasiconformal harmonic extensions, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform. 23(1997), 51-63.
Quasiconformality of harmonic extensions, J. Comput. Appl. Math. 105(1999), 425-436.
において論じた。これらの成果は、M.Pavlović の論文
Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 27(2002), 365-372.
によりさらに深められ、上記の調和拡張Fが擬等角であるための必要十分条件は、Fが bi-Lipschitz であることが示された。さらには、M.Pavlović により次のことも示されている。a.e. $z = e^{i\theta}$で存在するfのθに関する微分を$\dot{f}$で表すと、Fが擬等角写像であるためのもう一つの必要十分条件は、fが絶対連続であり、$\dot{f}$及び$\dot{f}$の Hilbert 変換がともにL^∞に属し、$\dot{f}$の絶対値の本質的下限が正であることである。像領域を複素平面の有界な凸領域とすると、これらの結果はそのままでは成り立たないことを反例で示すことが出来るが、類似の結果が成立つかは疑問であった。単位円板$\mathbb{D}$を定義域とし、凸領域を一般化したα-convex な領域を像領域とする擬等角で調和な写像の変形を論じ、調和な写像の 1 paramer 族による変形を用いた
On a result of Clunie and Sheil-Small, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A.66 (2012), no.2, 81-92.
A simple deformation of quasiconformal harmonic mappings in the unit disk, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 37(2012), 539-556.
の研究成果を利用することにより、像領域が複素平面の有界な凸領域の場合にも調和な写像の Lipschitz 性を仮定すれば、上記の Pavlović の結果の一般化とみなせる結果が得られることがわかり、論文
Quasiconformal and Lipschitz harmonic mappings of the unit disk onto

bounded convex domains, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Vol. 39 (2014), 811-830.
を発表した。また、擬等角で調和な写像の特徴付けに関する新たな進展結果及び新たな性質を
Distortion of the area measure for one-to-one harmonic mappings of the unit disk onto itself, Sci. Bull.Chelm Math. Comput. Sci. 2(2007), 39–48.
に発表した。

一方、Heinz(1959) による調和な写像に関する Heinz の不等式の一般化を考察してきた。K-擬等角で調和な写像に関する漸近的に sharp な Heinz の不等式等について、論文
On Heinz's inequality, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform.36(2002), 27-34.
On an asymptotically sharp variant of Heinz's inequality, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 30(2005), 167-182.
On a variant of Heinz's inequality for harmonic mappings of the unit disk onto bounded convex domains, Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź 59 (2009), 25– 36, Sér. Rech. Déform. 59.
を発表した。また、単位円 $\mathbb{T}$ 上の有界変動関数の Poisson 積分で与えられる調和な写像に対し、 種々の Heinz 型の不等式を示し、論文
Heinz type inequalities for Poisson integrals, Computational Methods and Function Theory, 14(2014), 219-236.
を発表した。K-擬等角で調和な写像に関する漸近的に sharp な、Schwarz の不等式 および bi-Lipschitz type の不等式については、論文
Three variants of Schwarz's lemma for harmonic mappings, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform. 51(2006), 23-36.
On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 32(2007), 579-594.
を発表した。

また、擬等角写像を一般化した μ-等角写像の境界挙動の研究について、須川 (東北大) および V. Gutlyanskii (NAS of Ukraine) との共同研究を行い、
On μ-conformal homeomorphisms and boundary correspondence, Complex Variables and Elliptic Equations 58 (2013), no.7, 947-962.
を発表した。向きを保つ単射で調和な写像は μ-等角写像でもある。

$F = H + \overline{G}$ を $\mathbb{D}$ 上の向きを保ち単射で調和な写像とする。ここで、H, G は $\mathbb{D}$ 上の正則関数で $G(0) = 0$ をみたす。H が凸、すなわち H が等角写像で $H(\mathbb{D})$ が凸領域とする。このとき、F が擬等角写像であるための必要十分条件、F が擬等角かつ Lipschitz 写像であるための必要十分条件のそれぞれについて、D. Partyka, J. Zhu (Huaqiao University, P,R.China) との共同研究で詳しく解析した。そして、$F(\mathbb{D})$ が凸領域の場合の対応する諸結果との類似性、相異性について論じ、論文

Quasiconformal harmonic mappings with the convex holomorphic part, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 43(2018), 401-418.
を発表した。また、

$$F_\epsilon := H + \epsilon\overline{G}, \quad \epsilon \in \mathbb{C},\ \epsilon\|\mu_F\|_\infty \leq 1,$$
$$(\mu_F(z) := \frac{\overline{\partial}F(z)}{\partial F(z)},\ z \in \mathbb{D})$$

とおく。 F あるいは単射であることを仮定された H がある条件をみたすときに、どの範囲に属す ϵ に対してまで言えるかを含めて、F_ϵ の単射性、擬等角性、close-to-convex 性、 $F_\epsilon \circ H^{-1}$ の bi-Lipschitz 性を詳しく考察していく。