

研究成果のまとめ

清水 達郎

研究の背景

私の現在の研究テーマは、3次元多様体論、特にWittenのChern-Simons量子場の理論に触発された3次元多様体の有限型不変量についてである。その中でもKontsevichおよびAxelrodとSingerによって構成されたChern-Simons摂動論に興味を持っている。Chern-Simons摂動論は3次元多様体とその上の(非輪状な)局所系の組に対する不変量の列を与える。局所系として特に自明な局所系をとることができるが、自明な局所系のChern-Simons摂動論はKuperbergとThurstonらによって整備され、さらに彼ら及びTaubes, Lescopらによってその性質が非常によく調べられている。一方非自明な局所系でのChern-Simons摂動論の性質はほとんどわかっていない。私の当面の目標は、非自明な局所系のChern-Simons摂動論を整備、解析し、自明な局所系の場合との関連を明らかにすることである。また、Chern-Simons摂動論と他の数学分野、特に写像の特異点論との関連にも興味を持っている。これらを踏まえ、これまでの主要な研究成果について、その概要をまとめた論文に沿って概略を述べる。

(1) 自明な局所系のChern-Simons摂動論とMorseホモトピーの一致を示した。

(論文: An invariant of rational homology 3-spheres via vector fields)

MorseホモトピーはChern-Simons摂動論の類似物であり、深谷賢治によってそのアイデアが与えられ、自明な局所系の場合には渡邊忠之によって整備された。MorseホモトピーはChern-Simons摂動論と何らかの意味で一致するだろうと、深谷、渡邊によって予想されていた。本論文では自明な局所系の場合にこの予想を肯定的に解決した。また、Morseホモトピーの定義される範囲をそれまで知られていた整ホモロジー球面から有理ホモロジー球面に拡張した。この論文によって、自明な局所系のChern-Simons摂動論のMorse関数を用いた計算が可能になった。

(2) 一般のChern-Simons摂動論の2-loop項の修正(Alberto S. Cattaneo氏との共同研究)

(論文: A note on the Θ -invariant of 3-manifolds(Aberto S. Cattaneo氏との共著))

Chern-Simons摂動論の一つの項である Θ 不変量のBottとCattaneoによる定義を(2)とは異なる、より汎用性のある別の方法を用いて修正した。特にSU(2)束の平坦接続由来の局所系の場合には本論文の不変量とこの不変量は一致する。

(3) Chern-Simons摂動論とTorsion不変量の関係

(論文: Chern-Simons perturbation theory and Reidemeister--Turaev torsion)

3次元多様体の1次元ホモロジー群のアーベル表現に関する不変量であるReidemeister-Turaev torsionとChern-Simons摂動論に関わる不変量との間の関係を明らかにした。これによりReidemeister-Turaev torsionに幾何的な意味を与えたといえる。