これまでの研究成果のまとめ

私はこれまで正標数における特異点の研究を行ってきた．その中でも基本的な特異点のクラスである商特異点について研究を進めてきた．商特異点とは群が多様体に作用したとき, 多様体をこの群作用で割ったときに現れる特異点のことである．標数 0 における商特異点は良い振る舞いをすることが知られている．例えば, 標数 0 では極小モデル理論で使われる分類において商特異点は log terminal というクラスに分類されることが知られている．特に 3 次元以下のゴレンシュタイン特異点はクレパント特異点解消という特別な特異点解消を持つことが Roan, Ito, Markushevich らによって示されている (1995-97)．このクレパント特異点解消がいつ存在するのかという問題は標数 0 でも高次元の場合には未解決であり, 正標数においても興味深い問題の 1 つである．またゴレンシュタイン特異点に対してクレパント特異点解消がある場合には, 特異点解消で得られる多様体の位相的オイラー標数と群の共役類の個数が一致するという Batyrev の定理 (Batyrev, 1999) が知られており, これが正標数で成り立つかどうかというのも関心のあるところであった．ただし正標数においては位相的オイラー標数を正標数の場合に拡張した l 進エタールコホモロジーから定まるオイラー標数に置き換えて考える．

標数 $p > 0$ における特異点については作用している群の位数が p で割り切れるような状況ではあまり良い振る舞いはせず, 様々な病的な現象が起こることが知られており, このような状況は野性的と呼ばれる．野性的な場合の先行研究としては $2n$ 次元アフィン空間に n 次対称群が標準的に作用した場合について研究した Wood-Yasuda(2015) や p 次巡回群がアフィン空間に作用している場合を研究した Yasuda(2014,2018) 等があげられる．前者においてはクレパント特異点解消が n 点ヒルベルト空間を考えることで得らることが述べられている．また後者の巡回群の作用については群の作用から定まる不変量から特異点のクラス分けを与えており, 特に 3 次元の場合でクレパント特異点解消をもつのは $p = 3$ の場合だけであることがわかる．またいずれの場合も Batyrev の定理と同様の主張が成り立つことがわかっている．

これに対して私は標数 3 で 3 次元のアフィン空間に位数が 3 で割り切れないアーベル群に 3 次の巡回群や対称群が半直積した形の有限群が線形に作用している場合について調べることによりクレパント特異点解消の無限系列を得た．また半直積しているのが対称群の場合には Batyrev の定理の等式が成り立たないことを得た．この結果は具体的に商特異点を求め, その特異点解消を構成することによって得ていたが, 一部については Yasuda 氏によって証明された野性的 McKay 対応を用いて $\mathbb{F}_q$-有理点の個数を数え上げることで Weil 予想と組み合わせることで別証明をあたえることができる．またこの計算は局所体のガロア拡大の重みつき数え上げの計算例として見ることもできる．先の Wood-Yasuda では有理点の数え上げが Serre-Bhagava の量公式の別証明となっていることを述べられており, この計算は量公式の別バージョンといえる．

野性的 McKay 対応の計算においては群の表現ごとに定まる $\boldsymbol{v}$-関数と呼ばれる局所体の拡大と群作用の組に対して有理数を定めるような関数を計算することが重要なポイントになっているが, この $\boldsymbol{v}$-関数の値を計算することは一般には難しい．これまでの計算例としては置換表現に対しては Wood-Yasuda で計算されており, また Yasuda(2016) においては置換表現の超平面になっているような場合について計算されている．また p べきの巡回群の表現に関する $\boldsymbol{v}$ 関数が Tanno-Yasuda(2019) などで計算されている．これまでの計算例においてはすべて局所体の拡大に対して定まる ramification filtration の情報のみから計算されていたが, 私は ramification filtration の情報のみからは $\boldsymbol{v}$-関数が決まらないような例を構成している．

標数 0 においては全ての商特異点が log terminal になるのに対し, 正標数においては log terminal でない商特異点が存在することが知られている．商特異点がいつ log terminal になるかという問題は重要な問題のひとつである．標数 0 においては Reid–Shepherd-Barron–Tai 判定法により各元の作用を個別にみることで特異点のクラスが判定できることが知られているが, 私は正標数においては同様の判定法を用いることができない例を構成した．またこの計算結果から標数 3 において 3 次元のアフィン空間に有限群が作用することによって得られる特異点がいつ log terminal になるかについての判定法を得ている．