Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition

倉田　和浩（首都大学東京・理工）　kurata@tmu.ac.jp

Abstract: この講演では, 幅 $\epsilon > 0$ の細い領域でのラプラシアンの Dirichlet-Neumann 混合境界条件のもとでの固有値 $\{\lambda_k(\epsilon)\}$ を考え, $\epsilon \to 0$ としたときの各 $\lambda_k(\epsilon)$ の漸近挙動についての研究結果（北大・神保秀一氏との共同研究）について紹介する.

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ を有界領域でなめらかな境界 $\Gamma = \partial\Omega$ をもつとする. 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して, $\Omega(\epsilon) = \{x \in \Omega \mid d(x,\Gamma) < \epsilon\}$, $\Gamma(\epsilon) = \{x \in \Omega \mid d(x,\Gamma) = \epsilon\}$ と置いて, 次の固有値問題を考える:

$$-\Delta\Phi = \lambda\Phi \quad \text{in} \quad \Omega(\epsilon), \quad \Phi = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma(\epsilon), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{1}$$

ここで $\nu(x)$ は Γ 上の外向き単位法線ベクトルとする. $\{\lambda_k(\epsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ で $0 < \lambda_1(\epsilon) < \lambda_2(\epsilon) \leq \lambda_3(\epsilon) \leq \cdots \to +\infty$ なる固有値の列を表すこととっし, $\{\Phi_{k,\epsilon}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ を付随する固有関数の列とする.

$H(\xi)$ で, $\xi \in \Gamma$ における平均曲率を表すとき, 次を得る.

Theorem 1 $k \geq 1$ を固定する. このとき, $\epsilon \to 0$ において, 次が成り立つ*:*

$$\epsilon^2\lambda_k(\epsilon) = \overline{\lambda}_1 - (\max_{\xi\in\Gamma} H(\xi))\ \epsilon + O(\epsilon^{3/2}).$$

ここで, $\overline{\lambda}_1 = \frac{\pi^2}{4}$ および $\phi(s)$ は, 次の第 1 固有値および固有関数である*:*

$$-\phi''(s) = \lambda\phi(s),\ s \in (0,1), \quad \phi'(0) = 0,\ \phi(1) = 0.$$

さらにある非退化条件を満たすとき（講演の際に詳細を述べる）, 次のより正確な漸近挙動を得る.

Theorem 2 $H(\xi)$ が唯 1 つの最大点 $\xi^* \in \Gamma$ *of* $H(\xi)$ をもち, そこで非退化であるとする. このとき, $k \geq 1$ を固定したとき, ある正定数 Λ_k が存在して次が成り立つ：

$$\epsilon^2\lambda_k(\epsilon) = \overline{\lambda}_1 - (\max_{\xi\in\Gamma} H(\xi))\ \epsilon + \Lambda_k\epsilon^{3/2} + o(\epsilon^{3/2}) \quad as\ \epsilon \to 0.$$

講演では, これらの証明の概略の紹介とともに, 関連する話題 (ある非線形楕円型境界値問題の分岐問題への応用, quantum wave guide との関連）についても紹介する.