等径部分多様体に関連した部分多様体の幾何学 (SUBMANIFOLD GEOMETRY RELATED TO ISOPARAMETRIC SUBMANIFOLDS)

大仁田 義裕 (大阪市立大学数学研究所 OCAMI)

1. 実空間形および標準球面内の等径超曲面

リーマン対称空間と同じく，**等径超曲面**もまた Elie Cartan によって最初に組織的な研究・分類が始められた豊かな「対称性」をもった多様体のクラスである ([1],[2], [3],[4]).

一般に，リーマン多様体上 (M, g_M) の実数値 C^∞ 級関数 f は，次の微分方程式を満たすとき，**等径関数** *(isoparametric function)* と呼ばれる：

$$g_M(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f) = \phi_1(f), \tag{1.1}$$

$$\Delta^M f = \phi_2(f). \tag{1.2}$$

ここで，ϕ_1 は C^1 級関数，ϕ_2 は C^0 級関数である．このとき，f の各正則値 c に対する等位超曲面 $M_c := f^{-1}(c)$ は平均曲率一定超曲面であり，**等径超曲面** *(isoparametric hypersurface)* と呼ばれる．この場合の等位超曲面族 $\{M_c \mid c \text{ は } f \text{ の正則値}\}$ は，**等径超曲面族** *(isoparametric family)* と呼ばれる．

実空間形 $M^{n+1}(c)$ (ユークリッド空間 $c = 0$，実双曲空間形 $c = -1$，標準球面 $c = 1$) 内にはめ込まれた超曲面に対しては，等径超曲面であることと**主曲率一定超曲面**であることは同値であり，等径超曲面族は単位法ベクトル場に沿った平行超曲面族である（[1]）.

実空間形内の主曲率一定超曲面 N の相異なる主曲率の個数を g，その重複度を $m_1, \cdots, m_g$ で表わす．$c \leq 0$ のときは，$g = 1$ または 2 で，平行な第 2 基本形式をもつ超曲面となる分類は容易である ([1])．標準球面 $M^{n+1}(c) = S^{n+1}(1)$ $(c = 1)$ の場合は，$m_1 = m_3 = \cdots$ かつ $m_2 = m_4 = \cdots$ が示され，さらに $g = 1, 2, 3, 4$ または 6 に限るという Münzner の驚くべき定理 (1980-1981[25], [26]) は有名である．標準球面 $S^{n+1}(1)$ 内の任意の等径超曲面は，次の微分方程式を満たす $\mathbb{R}^{n+2}$ 上の g 次同次多項式（*Cartan-Münzner* **多項式**）を $S^{n+1}(1)$ に制限した関数

第 68 回幾何学シンポジウム（2021 年 8 月 31 日 – 9 月 3 日，オンライン）全体講演（9 月 3 日, Zoom）予稿の改訂版. This work is supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP17H06127, JP18K03307, JP18H03668, JP21K03252 and by Osaka City University Advanced Mathematical Institute: MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics JPMXP0619217849.

の等位超曲面として与えられる（とくに，標準球面に埋め込まれたコンパクトな等径超曲面に一意的に拡張される）（[25]）：

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \|\mathrm{grad}^{\mathbb{R}^{n+2}} F\|^2 = g^2 r^{2(g-1)}, \\ \Delta^{\mathbb{R}^{n+2}} F \ = \ \mathfrak{c}\, r^{g-2}. \end{cases}$$

ここで，$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2$, $\mathfrak{c} = \dfrac{(m_1 - m_2)g^2}{2}$ とする．

標準球面 $S^{n+1}(1)$ の等径超曲面の構成は，2 つの方法が知られている．

階数 2 のリーマン対称対 (U, K) の等方表現の主軌道 (正則元の軌道) は，標準球面の等質な等径超曲面であり，全ての等質な等径超曲面を与える（Hsiang-Lawson1971 [12], 高木亮一-高橋恒郎 1972 [44]）．

また，クリフォード代数の表現（クリフォード系）から Cartan-Münzner 多項式を構成することによる $g = 4$ の非等質な（しかしスピノル群の非自明な群作用をもつ）等径超曲面の可算無限系列を含む代数的構成が，尾関英樹-竹内勝 1975-1976 [38], [39] によって最初に発見されて，Ferus-Karcher-Münzner 1981 [8] によって一般化された（OT-FKM 型等径超曲面）．OT-FKM 型等径超曲面がもつ豊かなリーマン幾何学（合同性や非合同性，[8] ）やトポロジー（コホモロジー環，ホモトピー同型性，微分同相性，イソトピー性）的性質（Qi-Ming Wang 1988 [51]）がよく知られている．

近年分類研究が急速に進展し（$g = 6$:宮岡礼子 [21, 22]，$g = 4$:Cecil-Chi-Jensen, Immervoll, Q.-S.Chi)，最後に残されていた $g = 4, (m_1, m_2) = (7, 8)$ の場合を Q.-S.Chi（J. Differential Geom. 2020)）が解決し，標準球面内の全ての等径超曲面はこの 2 つのどちらかの方法で与えられることが明らかにされた．とくに非等質な等径超曲面が現れるのは $g = 4$ のときのみで，クリフォード系から構成される OT-FKM 型である．

2. 標準球面内の等径超曲面のガウス像の幾何学

標準球面の超曲面幾何学は，ガウス写像を通して複素 2 次超曲面のラグランジュ部分多様体と密接に関わる．複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ の $(z_0)^2 + (z_1)^2 + \cdots + (z_{n+1})^2 = 0$ によって定義される複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ は，ユークリッド空間の向き付けられた 2 次元ベクトル空間全体から成る実グラスマン多様体 $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ と同一視でき，階数 2 の複素 n 次元コンパクト型エルミート対称空間 $SO(n+2)/(SO(2) \times SO(n))$ である．$n+1$ 次元単位標準球面 $S^{n+1}(1)$ 内の向き付けられた超曲面 N のガウス写像

$$\mathcal{G} : N^n \ni p \longmapsto [\mathbf{x}(p) + \sqrt{-1}\mathbf{n}(p)] = \mathbf{x}(p) \wedge \mathbf{n}(p) \in Q_n(\mathbf{C}) = \widetilde{Gr}_2(\mathbb{R}^{n+2})$$

は，常に複素 2 次超曲面へのラグランジュはめ込みになる．単位標準球面内に与えられた超曲面が等径超曲面の場合，ガウス写像はもとの

超曲面から複素2次超曲面への極小ラグランジュはめ込み（零平均曲率）になることが知られている ([42]).

Hui Ma(馬輝, 現:北京・清華大学数学科学系教授) と大仁田の共同研究 (2005年頃から) では次のような研究を進めてきた．基本的性質として，等径超曲面のガウス像（ガウス写像の像）は，もとの等径超曲面で Z_g-被覆される複素二次超曲面内に埋め込まれたコンパクト極小ラグランジュ部分多様体となる ([14])．$g=1$ または2であることと等径超曲面のガウス像が複素二次超曲面の全測地的ラグランジュ部分多様体 (実形) であることは同値であることは注意したい．さらに等径超曲面のガウス像は，複素2次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の monotone かつ cyclic なラグランジュ部分多様体で，最小マスロフ数は整数 $\frac{2n}{g}$ に等しく，そのガウス像が向き付け可能であることと $\frac{2n}{g}$ が偶数であることと同値であること等を示した（[28],[16]）．ここで，等径超曲面論において $\frac{2n}{g}$ は整数になることは知られている．

さらに，幾何学的変分問題の立場から，全ての等質等径超曲面のガウス像の (強) ハミルトン安定性 (ハミルトン変形のもとでのラグランジュ部分多様体の体積の第2変分非負性) 及びハミルトン剛性 (無限小ハミルトン極小変形の自明性) を完全に決定した：$g=1,2,3$ の場合 ([14]), $g=4$ かつ (U,K) が古典型の場合 ([16]), $g=4$ で (U,K) が例外型及び $g=6$ の場合 ([17]).

これらの結果を踏まえ，$g=4$ 非等質な場合，OT-FKM 型等径超曲面のガウス像のハミルトン安定性決定の問題はまだ未解決である．そのために，関連する性質や構造を調べながらクリフォード系から構成される OT-FKM 型等径超曲面理論の検討をしている．

また，シンプレクティックトポロジーの立場から等径超曲面のガウス像のハミルトン交叉性の研究もまた非常に興味深い．もう一つの問題は，与えられたラグランジュ部分多様体のハミルトン non-displaceability（任意のハミルトン変換で必ず交叉するという性質）問題であり，唯一の最善の方法は，そのフレアーホモロジーが非自明であることを証明することである。研究代表者は入江博 (茨城大学理学部准教授)，Hui Ma, 宮岡礼子 (東北大学名誉教授) との共同研究において，等径超曲面のガウス像に対して，monotone ラグランジュ部分多様体に対するフレアーホモロジー理論およびスペクトル系列を使って，そのフレアーホモロジーあるいは lifted フレアーホモロジーの非自明性を示すというアプローチをとって，$(g,m_1,m_2)=(3,1,1)$, $(4,1,k)\,(k\geq 1)$, $(6,1,1)$ の場合 (対応する等径超曲面はすべて等質) を除いて，等径超曲面のガウス像はハミルトン non-displaceable であることを証明した．とくに全ての非等質な等径超曲面のガウス像はハミルトン non-displaceable であることが分かり，残された問題は非常に限られた等質等径超曲面の場合であるが，等径超曲面のガウス像のハミルトン安定性問題では，非等質な場合が全て残されているという対比は興味深い．残された場合も

ハミルトン non-displaceable であることが予想されるが，そのために，等径超曲面のガウス像のフレアーホモロジーあるいは lifted フレアーホモロジーの一層の研究を行なっている．等径超曲面とその上の Z_g-被覆群作用の幾何・トポロジーのより深い研究により，等径超曲面のガウス像のフレアーホモロジーに関するより多くの情報が引き出し，解決したいと考えている．

3. 等径部分多様体と R 空間

ユークリッド空間 $\mathbb{E}^{m+k}$ にはめ込まれた部分多様体 M は，その法接続 $\nabla^{\perp}$ が平坦で，$\nabla^{\perp}$ に関して平行な法ベクトルの任意の局所場 ν に対する形作用素 A_ν は固有値と重複度が一定になるとき，**等径部分多様体** *(isoparametric submanifold)* と呼ばれ，標準球面の等径超曲面のもつ多くの基本的性質が拡張される ([48], [13])．

(U, K, θ) をコンパクト対称空間 U/K に随伴するコンパクトリーマン対称対とする．ここで，U はリー代数 $\mathfrak{u}$ をもつ連結コンパクトリー群，θ は U の対合的自己同型写像とする．

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$$

を $\mathfrak{u}$ の対称リー代数としての標準分解とする．$\mathfrak{a}$ は，ベクトル空間 $\mathfrak{p}$ の一つの極大可換部分ベクトル空間である．$\mathfrak{u}$ の $\mathrm{Ad}(U)$ 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{p}$ への制限によってベクトル空間 $\mathfrak{p}$ をユークリッド空間とみなすことができる．コンパクト対称空間 G/K の等方表現は，ベクトル空間 $\mathfrak{p}$ 上の K の直交表現

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}} : K \ni a \longmapsto \mathrm{Ad}(a)|_{\mathfrak{p}} \in O(\mathfrak{p}),$$

であり，s **表現**とも呼ばれ，$\mathfrak{a}$ を断面とする**極的表現**であることはよく知られている．ゼロベクトルでない任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して，

$$\Phi_H : K/K_H \ni aK_H \longmapsto \mathrm{Ad}(a)H \in \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(K)H \subset \mathfrak{p}$$

によって K の等方表現の H を通る軌道と微分同相なコンパクト等質空間 K/K_H を定める．ここで，$K_H := \{a \in K \mid \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(a)H = H\}$ とおく．このようにして得られたコンパクト等質空間 K/K_H は，**R 空間** *(R-space)* と呼ばれる．その埋め込み $\Phi_H : K/K_H \to \mathfrak{p}$ は，R 空間 K/K_H の**標準埋め込み** *(standard imbedding)* と呼ばれる．(K, K_H) がコンパクト対称対になるとき，R 空間 K/K_H はとくに**対称 R 空間**と呼ばれる．このとき，標準埋め込み $\Phi_H : K/K_H \to \mathfrak{p}$ は，平行な第 2 基本形式をもち．対称 R 空間の標準埋め込みは,（アファン部分空間の直積因子を除いて）ユークリッド空間内の平行な第 2 基本形式をもつ全ての部分多様体を与える (Ferus 1974 [7])．$H \in \mathfrak{p}$ が正則元 (同値に $\mathrm{Ad}(K)H$ は最大次元の軌道) のとき，R 空間 K/K_H は，**正則な R 空間**と呼ばれる．このとき，標準埋め込み $\Phi_H : K/K_H \to \mathfrak{p}$ は，ユークリッド空間の等質な等径部分多様体であり，正則な R 空間の標準埋め込みは,（ア

ファン部分空間の直積因子を除いて）ユークリッド空間内の全ての等質な等径部分多様体を与える (Palais-Terng 1987 [40], Dadok 1985 [6]).

一般の R 空間の標準埋め込みに対する微分幾何学的な特徴付けが Olmos-Sanchez 1991 [35] によって与えられている．一般に，リーマン多様体 (M, g_M) のアフィン接続 $\tilde{\nabla}$ は，計量的 $\tilde{\nabla} g_M = 0$ かつ $\tilde{\nabla}\tilde{D} = 0$ を満たすとき，(M, g_M) の**標準接続**であるという．レビ-チビタ接続 ∇^M は自明な標準接続である．ここで，M 上の $(1,2)$ 型テンソル場 $\tilde{D} := \nabla^M - \tilde{\nabla}$ とおく．ユークリッド空間内にはめ込まれた部分多様体 M の**第 2 基本形式 α^M の M の一つの標準接続 ∇^c に関する共変微分**が，$\forall X, Y, Z \in TM$ に対して，

$$(\nabla^c_X \alpha^M)(Y, Z) := \nabla^\perp_X(\alpha^M(Y, Z)) - \alpha^M(\nabla^c_X Y, Z) - \alpha^M(Y, \nabla^c_X Z)$$

によって定義される．$\nabla^c = \nabla^M$ のときは，通常の $\nabla^c \alpha^M = \nabla^* \alpha^M$ である．

定理 3.1 (Olmos-Sánchez 1991 [35])**.** ユークリッド空間にはめ込まれたコンパクト部分多様体（あるいは標準球面はめ込まれた部分多様体）M に関する次の 3 条件は同値である：

(1) M 上の標準接続 ∇^c が存在して，

$$\nabla^c \alpha^M = 0 \tag{3.1}$$

を満たす．

(2) M は主曲率一定等質部分多様体である．

(3) M はある s 表現の軌道，即ち，標準的に埋め込まれた R 空間である．

主曲率一定等質部分多様体 (定義は [35, p.127, Definition 1.2] を参照) は，[11] の意味での**主曲率一定部分多様体**になるが，等質な主曲率一定等質部分多様体は主曲率一定等質部分多様体とは限らない (反例あり).

等径部分多様体の等質性問題は，最も重要な問題の一つである．

定理 3.2 (Thorbergsson 1991 [50])**.** ユークリッド空間の既約な等径部分多様体は，その余次元が 3 以上ならば，等質である．よって，標準的に埋め込まれた正則な R 空間である．

[50] の証明は，Tits Buildings の理論を本質的に使う．Carlos Olmos 1993 [36] は，ユークリッド空間内の等径部分多様体上に非自明な標準接続を構成し，定理 3.1 を適用して，定理 3.2 の微分幾何学的な別証明を与えている．

等径部分多様体の等質性定理 3.2 は，無限次元へ一般化されている：

定理 3.3 (Xiaobo Liu-Heintze 1999 [10] Gorodski-Heintze 2021 [9])**.** 可分ヒルベルト空間内の既約なプロパーフレッドホルム等径部分多様体は，有限次元のときはその余次元が 3 以上ならば，無限次元のときはその余次元が 2 以上ならば，等質になる．

無限次元可分ヒルベルト空間の既約な等質プロパーフレッドホルム等径部分多様体の分類は，極めて興味深い未解決問題である．

コンパクト対称空間 G/K 上の無限次元リーマンサブマーションの方法によって，無限次元可分ヒルベルト空間のプロパーフレッドホルム等径部分多様体の具体例を与えることができることが知られている (Terng-Thorbergsson 1995 [49])：

$$\begin{tikzcd}
\hat{N}=\phi^{-1}(\pi^{-1}(N)) \arrow[d, "\Omega G"] & \subset & V = L^2([0,1],\mathfrak{g}) \arrow[d, "\phi"', "\Omega G"] & \cong & H^1([0,1];e,G) \\
\pi^{-1}(N) \arrow[d, "K"] & \subset & G \arrow[d, "\pi"', "K"] & & \\
N & \subset & G/K & &
\end{tikzcd}$$

ここで，$\phi : V \to G$ は，各 $u \in V = L^2([0,1],\mathfrak{g})$ に対して，$\gamma(0) = e$ を満たす $\gamma'(t) = \gamma(t)u(t)$ の一意解 $\gamma \in H^1([0,1];e,G)$ をとって，$\phi(u) := \gamma(1) \in G$ と定める．これは，各ファイバーがヒルベルト空間 V の弱鏡映的なプロパーフレッドホルム極小部分多様体となるような無限次元リーマンサブマーションである (森本真弘 [18],[19])．このとき，N が G/K の等焦部分多様体 (equifocal submanifold) であることと $\hat{N} = \phi^{-1}(\pi^{-1}(N))$ がヒルベルト空間 V のプロパーフレッドホルム等径部分多様体であることは同値になることが知られている (Terng-Thorbergsson 1995 [49])．

4. ラグランジュ部分多様体としての R 空間

前節 3 のコンパクト対称対 (U,K,θ) において，R 空間 $L := K/K_H$ を考えた．さらに，今，$U_H := \{a \in U \mid \mathrm{Ad}(a)(H) = H\}$ とおくと，コンパクト等質空間 $M := U/U_H$ は，一般化旗多様体（ケーラー C 空間，複素 R 空間）であり，標準埋め込み

$$\Phi_H : M = U/U_H \ni aU_H \longmapsto \mathrm{Ad}(a)H \in \mathrm{Ad}(U)H \subset \mathfrak{g}$$

をもつ．$M = U/U_H$ 上には，$\omega_H(X,Y) := \langle [H,X],Y \rangle$ によって定義された不変シンプレクティック形式 ω_H，それと適合した不変複素構造および不変ケーラー構造を入れることができる．このとき，R 空間 L のケーラー C 空間 M への自然な埋め込み（*canonical embedding*）

$$\iota_H : L = K/K_H \ni aK_H \longmapsto aU_H \in M = U/U_H$$

は，ラグランジュ埋め込みである．また，$\theta(U_H) = U_H$ だから，$M = U/U_H$ 上の対合的微分同相写像

$$\hat{\theta}_H : M = U/U_H \ni aU_H \longmapsto \theta(a)U_H \in M = U/U_H$$

が誘導される．$\hat{\theta}_H$ は，反シンプレクティックで反正則な M の等長変換である．また一方，シンプレクティック多様体 (M, ω_H) の上への U の自然な左群作用は，運動量写像 $\mu_U := \Phi_H : M \to \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ をもつハミルトン群作用であり，さらに，(M, ω_H) の上への $K \subset U$ の自然な左群作用は，運動量写像 $\mu_K := \pi_{\mathfrak{k}} \circ \Phi_H : M \to \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ をもつハミルトン群作用である．このとき，

$$\iota_H(K/K_H) = \mathrm{Fix}(M, \hat{\theta}_H) = \mu_K^{-1}(0) \tag{4.1}$$

が成り立つ ([30])．さらに，コンパクト対称空間 U/K の仕組みを使って，R 空間の自然な埋め込み $\iota_H : L = K/K_H \to M = U/U_H$ は，Y.-G. Oh の意味での大域的タイトなラグランジュ部分多様体であることを示すこともできる ([31])．また，R 空間 $L = K/K_H$ の同型類の中で $H \in \mathfrak{a}$ を取り換えて，(M, ω_H) に入る不変ケーラー計量をアインシュタイン-ケーラーにすることができ，そこで小野肇の結果 ([37]) を適用することができ，R 空間のアインシュタイン・ケーラー C 空間への自然な埋め込み $\iota_H : L = K/K_H \to M = U/U_H$ の最小マスロフ数のリー理論的公式を得た ([30])．幾つかの具体的な計算例も与えている．2 節での $g = 1$ および 2 に対する等径超曲面のガウス像は，$(U, K) = (SO(m_1 + m_2 + 2), SO(m_1 + 1) \times SO(m_2 + 1))$ の場合の R 空間の自然な埋め込み ι_H として与えられることで関係する．

5. 複素部分多様体と R 空間

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の第 2 基本形式が平行（$\nabla^* \alpha^M = 0$）な複素部分多様体 M は，中川久雄-高木亮一 1976 [27] によって分類された．竹内勝 1984 [46] はエルミート型ジョルダン 3 重系理論による別証明をしている．$\pi : S^{2n+1}(1) \to \mathbf{C}P^n$ をホップ束写像とする．

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^{n+1} \\ & \cup \\ \hat{M} = \pi^{-1}(M) \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"', "S^1"] & S^{2n+1}(1) \arrow[d, "\pi"', "S^1"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{C}P^n \end{tikzcd}$$

定理 5.1 (O.[32])**.** $\mathbb{C}P^n$ の任意の複素部分多様体 M に対して，$T\hat{M}$ 上に非自明な（レビ-チビタ接続でない）標準接続 ∇^c が存在して，

$$\nabla^c \alpha^{\hat{M}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla^* \alpha^M = 0\,.$$

となる．

そこで，Olmos-Sánchez の定理 3.1 と M の $U(n+1)$ 対称性・既約性の微分幾何的議論によって，次が得られる：

系 5.1 (竹内勝 [46]). **複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の第 2 基本形式が平行な複素部分多様体 M は，コンパクト型既約エルミート対称対に附随したある R 空間のホップ束写像 π による射影として得られる.**

さらに，コンパクト型既約エルミート対称対に係るルート計算によって具体的に M を決定して，中川-高木の定理 [27] を得ることができる. その際, [43] の結果は有用である.

注意 . Jong Taek Cho(全南大学), 橋本要 (阪市大数学研) との共同研究において，四元数射影空間の第 2 基本形式が平行な全複素部分多様体 M に対しても同様な結果を得ている（本シンポジウムの橋本要氏の講演）. また，ごく最近，上述の標準接続 ∇^c と佐々木幾何学（奥村正文の M 接続）との関係も明らかになった（O. [33]）.

References

[1] E. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*. Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938), 177–191.

[2] E. Cartan, *Sur des familles remarquables dh́ypersurfaces isoparamétriques dans les espaces spheriques*. Math. Z. **45** (1939), 335–367.

[3] E. Cartan, *Sur quelques familles remarquables dh́ypersurfaces*. C.P. Congrés Math. Liège (1939), 30–41.

[4] E. Cartan, *Sur des familles remarquables dh́ypersurfaces isoparamétriques dans les espaces spheriques à r et* 9 *dimensions*. Rev. Unib. Tucoman A **I** (1940), 5–22.

[5] J.-T. Cho, K. Hashimoto and Y. Ohnita, *Totally complex submanifolds and R-spaces*. in preparation.

[6] J. Dadok, *Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **288**, no. 1 (1985), 125–137.

[7] D. Ferus, *Immersions with parallel second fundamental form*. Math. Z. **140** (1974), 87–92.

[8] D. Ferus, H. Karcher and H. F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen*. Math. Z. **177** (1981), 479–502.

[9] C. Gorodski and E. Heintze, *Homogeneous structures and rigidity of isoparametric submanifolds in Hilbert spaces*. J. Fixed Point Theory Appl. **11** (2012), 93–136.

[10] E. Heintze and X. Liu, *Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds*. Ann. of Math. **149** (1999), 149–181.

[11] E. Heintze, C. Olmos and G. Thorbergsson, *Submanifolds with constant principal curvatures and normal holonomy groups*. Internat. J. Math. **2** (1991), 167–175.

[12] W.-Y. Hsiang and H. B. Lawson, Jr., *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geom. **5** (1971), 1–38.

[13] W.-Y. Hsiang, R. S. Palais and C. L. Terng, *The topology of isoparametric submanifolds*, J. Differential Geom. **27** (1988), 423–460.

[14] H. Ma and Y. Ohnita: *On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres*, Math. Z. 261 (2009), 749-785.

[15] H. Ma and Y. Ohnita: *Differential geometry of Lagrangian submanifolds and Hamiltonian variational problems*, in Harmonic Maps and Differential Geometry, Contemporary Mathematics, vol. 542, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2011, pp.115-134.

[16] H. Ma and Y. Ohnita: *Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces,* I. J. Differential Geom. **97** (2014), 275-348.

[17] H. Ma and Y. Ohnita: *Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces,* II, Tohoku Math. J. **67**, no.2 (2015), 195-246.

[18] M. Morimoto, *On weakly reflective PF submanifolds in Hilbert spaces*, Tokyo J. Math. **44** (2021), no. 1, pp.103–124.

[19] M. Morimoto, *Austere and arid properties for PF submanifolds in Hilbert spaces*, Differential Geom. Appl. **69** (2020) 101613, 24pp.

[20] H. Iriyeh, H. Ma, R. Miyaoka and Y. Ohnita: *Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces*, Bull. London Math. Soc. (2016) 48 (5): 802-812.

[21] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with* $(g, m) = (6, 2)$. Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 1, 53–110.

[22] R. Miyaoka, *Errata of "Isoparametric hypersurfaces with* $(g, m) = (6, 2)$*"*. Ann. of Math. (2) **183** (2016), no. 3, 1057–1071.

[23] R. Miyaoka, *Moment maps and isoparametric hypersurfaces of OT-FKM type*, Sci. China Math. **64** (2021).

[24] R. Miyaoka and Y. Ohnita: *Lagrangian geometry of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces in spheres*, Complex Manifolds 2019; 6:265-278.

[25] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperfläche in Sphären*, Math. Ann. **251** (1980), 57–71.

[26] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperfläche in Sphären,* II. *Über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel*, Math. Ann. **256** (1981), 215–232.

[27] H. Nakagawa and R. Takagi, *On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space*. J. Math. Soc. Japan **28** (1976), no. 4, 638–667.

[28] Y. Ohnita: *Geometry of Lagrangian Submanifolds and Isoparametric Hypersurfaces*, Proceedings of The Fourteenth International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, 14 (2010), pp43-67, ed. by Y.-J. Suh, National Institute for Mathematical Sciences, The Korean Mathematical Society and Grassmann Research Group.

[29] Y. Ohnita: *On Floer homology of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces*, In: " Hermitian-Grassmannian Submanifolds " , Daegue, Korea, July 2016, Editors: Y.-J. Suh, Y. Ohnita, J. Zhou and B.-H. Kim and H.-J. Lee, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 203, pp.235–247, Springer, 2017.

[30] Y. Ohnita: *Minimal Maslov number of R-spaces canonically embedded in Einstein-Kähler* C*-spaces*, Complex Manifolds 2019; 6:303-319.

[31] Y. Ohnita: *Geometry of R-spaces canonically embedded in Kähler* C*-spaces as Lagrangian submanifolds*, Proceedings of the 22nd International Workshop on Differental Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems and 17th RIRCM-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop, 22 (2019), pp.115-132.

[32] Y. Ohnita, *Parallel Kähler submanifolds and R-spaces*, to appear in Contemporary Mathematics, Differential Geometry and Global Analysis. In Honor of Tadashi Nagano.

[33] Y. Ohnita, *Canonical connections of a Sasakian manifold and invariant submanifolds with parallel second fundamental form*, Proceedings of The 23rd International Differential Geometry Workshop on Submanifolds in Homogeneous Spaces and Related Topics 23 (2021), 31–40, KNU, RIRCM, OCAMI, NRF, JSPS, Pukyong Univ. (OCAMI Preprint Ser. no.21-3.)

[34] C. Olmos, *The normal holonomy group.* Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), no. 3, 813–818.

[35] C. Olmos and C. Sánchez, *A geometric characterization of the orbits of s-representations.* J. reine angew. Math. **420** (1991), 195–202.

[36] C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and their homogeneous structures.* J. Differential Geom. **38** (1993), 225–234.

[37] H. Ono, *Integral formula of Maslov index and its applications.* Japan J. Math., **30** no. 2, (2004), 413–421.

[38] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres* I, Tohoku Math. J.(2) **27** (1975), 515–559.

[39] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres* II, Tohoku Math. J.(2) **28** (1976), 7–55.

[40] R. S. Palais and C. L. Terng, *A general theory of canonical forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** no. 2 , (1987), 771–789.

[41] B. Palmer, *Buckling eigenvalues, Gauss maps and Lagrangian submanifolds*, Diff. Geom. and its Appl. **4** (1994), 391-403.

[42] B. Palmer, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps*, Diff. Geom. and its Appl. **7** (1997), 51-58.

[43] H. Song, *Some differential-geometric properties of R-spaces.* Tsukuba J. Math. *25* no. 2 (2001), 279–298.

[44] R. Takagi and T. Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a unit sphere*, Differential Geometry, in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, (1972), 469–481.

[45] M. Takeuchi, *Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **12** (1965), 81-192.

[46] M. Takeuchi, *Parallel projective manifolds and symmetric bounded domains.* Osaka J. Math. **21** (1984), 507–544.

[47] M. Takeuchi and S. Kobayashi, *Minimal imbeddings of R-spaces*, J. Differential Geom. **2** (1968), 203-215.

[48] C. L. Terng, *Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups*, J. Differential Geom. **21** (1985), 79–107.

[49] C.-L. Terng and G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces.* J. Differential Geom. **42** (1995), no. 3, 665–718.

[50] G. Thorbergsson, *Isoparametric foliations and their buildings*, Ann. of Math. **133** (1991), 429–446.

[51] Qi-Ming Wang, *On the topology of Clifford isoparametric hypersurfaces*, J. Differential Geom. **27** (1988), 55–66.

大阪市立大学数学研究所 & 大阪市立大学理学研究科数学教室, 〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138
E-mail address: `ohnita@sci.osaka-cu.ac.jp`