

研究計画

酒井 高司

(1) 交叉積分公式の表示と積分不変量の幾何学的性質

これまでの研究を基に Chern-Federer に対応するような積分公式が単純な形で表される不変量の族を見つけない。また、最近得た二点等質空間における Chern-Federer の公式に関する結果は積分幾何学において基本的である“転送原理”がより弱い条件の下で成立するのではないかということを示唆している。これらの研究は幾何学的に重要な意味を持つと思われる不変量の研究につながる。これにより積分不変量の特徴づけを行い、特性類などの幾何学的不変量との関連を明らかにして行きたい。これまでに 2 次の不変多項式から定義される積分不変量に関する交叉積分公式を得た。Poincaré の公式がある種の部分多様体の体積最小性の証明に応用されていることの類似として、新たに得られた交叉積分公式を 2 次の積分不変量に関する変分問題、特に Willmore 曲面の研究に応用したい。

(2) Lagrange 部分多様体の Hamilton 体積最小性

Hamilton 変形で体積最小となる Lagrange 部分多様体は自明なものを除いてこれまでほとんど知られていなかった。それは、シンプレクティック幾何における Lagrange 交叉理論については近年 Floer ホモロジーを使った研究が盛んに行われている一方で、Riemann 幾何的側面の積分幾何に関する研究が整備されていなかったことが一因である。Kähler-Einstein 多様体内の極小 Lagrange 部分多様体としてまず研究すべき対象は Hermite 対称空間の実形であろう。Hermite 対称空間の実形で Hamilton 安定なものは Amarzaya-大仁田により分類されている。我々が導入した手法により、これら Hamilton 安定な実形のうちで Hamilton 体積最小になるものを決定したい。さらに、Hermite 対称空間内の Hamilton 変形で体積最小になる Lagrange 部分多様体を分類することによって、Lagrange 部分多様体の Hamilton 微分同相類のモジュライ空間の研究に発展させたい。

(3) Austere 部分多様体と special Lagrangian cone

これまでの研究で対称空間の線形イソトローピー表現から得られる球面内の austere 軌道を分類した。今後はさらに球面内の等質な austere 部分多様体を分類したい。また、球面内には非等質な等径超曲面が無限個存在することが知られているが、これらの焦点部分多様体として得られる非等質な austere 部分多様体の中で弱鏡映になるものを見つけない。

n 次元球面 S^n 内の austere 部分多様体からは Harvey-Lawson による twisted normal bundle により S^{2n+1} 内の極小 Legendrian 部分多様体を作り、これから \mathbb{C}^n 内の special Lagrangian cone を構成することができる。近年 Joyce により conical singularity を持つ special Lagrangian 部分多様体の smoothing に関する興味深い研究が発表されている。今回の我々の結果から構成される special Lagrangian cone の stability や rigidity を調べることは次に行わなければならない研究課題である。

(4) 可積分系の理論を使った部分多様体の幾何学

Blaschke は \mathbb{R}^3 内の放物型アフィン球面が正則関数によって表示されることを示した。これは放物型アフィン球面に関する Monge-Ampère 方程式が積分可能であることと関係している。近年、Cortès, Baues の研究によって特殊 Kähler 多様体は放物型アフィン超球面としての埋め込みを許容することが示された。さらに Cortès はある種の放物型アフィン超球面についての表現公式を与えている。しかし、彼らの研究は古典的な微分幾何学的手法による。我々は放物型アフィン超曲面の研究に可積分系の理論からのアプローチを導入したい。彼らの研究をさらに進め、CMC 曲面における DPW 理論のように正則型データから放物型アフィン超曲面を具体的に構成する手法を確立し、その微分幾何学的な性質についての研究を行いたい。将来的にはこれら積分幾何と可積分系の理論による Willmore 曲面、CMC 曲面、放物型アフィン超曲面に関するカテゴリーを現在開発中の Java 版 3D-XplorMath に組み込み研究成果を広く社会に還元したいと考えている。