# 研究成果

宮澤 治子

結び目や絡み目の構造を直接研究するという立場に, 局所変形の研究というものがある. 局所変形とは, 結び目や絡み目の一部分 (タングル) を他のものに置き換える操作のことをいう.

私は上で述べた結び目 (絡み目) の局所変形に興味を持ち, その研究を続けてきた. 論文 [1] においては, 3 以上の自然数 $n$ に対応する局所変形の列を定義し ($n$-gon move という), 各 $n$ においてそれらが結び目解消操作であることを証明した. さらに, 任意の結び目 $K$ に対し, ある自然数 $n$ が存在し, $K$ は 1 回の $n$-gon move により自明な結び目になることも示した.

近年, V. A. Vassiliev により新しい不変量が定義された. 結び目を $R^1$ から $R^3$ への smooth map と考え, それらがなす空間のコホモロジーを考えることによって, 結び目に対して, 自然数 $n$ に対応した不変量が得られる. この不変量は, 位数 $n$ の Vassiliev 不変量と呼ばれ, 絡み目に対しても同様に定義できる.

今までに知られている不変量の中にも, 多くの Vassiliev 不変量があることが示されている. 例えば, 有向絡み目 $L$ の Conway 多項式の $z^n$ の係数 ($a_n(L)$ とかく) や $L$ の Jones 多項式 $V_L(t)$ を $t$ で $n$ 回微分して $t=1$ を代入したもの ($V^{(n)}(L)$ とかく) も位数 $n$ の Vassiliev 不変量である. 一般に, 量子群に付随して得られる様々な不変量 (homfly 多項式や Kauffman 多項式も含む) は Vassiliev 不変量になっている.

一方, K. Habiro により定義された, 自然数 $n$ に対応する $C_n$-move と呼ばれる絡み目の局所変形がある. 各 $n$ に対し, $C_n$-move は有限個の局所変形の集合として定義されているが, その集合の任意の元はある特別な $C_n$-move により生成されるので, ここではその特別な $C_n$-move だけを考えることにする. $C_n$-move は, Vassiliev 不変量と深い関係がある. M. N. Gusarov, T. Stanford, Y. Ohyama はそれぞれ独立に $S^3$ 内の 二つの絡み目 $L, L'$ が有限回の $C_{n+1}$-moves で移り合うならば, 位数が $n$ 以下の任意の Vassiliev 不変量 $v$ に対し, $v(L)=v(L')$ が成り立つということを示した.

上の結果によれば, 二つの絡み目 $L, L'$ が有限回の $C_n$-move で移り合うならば, $a_k(L)-a_k(L')=0$ かつ $V^{(k)}(L)-V^{(k)}(L')=0$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ となることが分かる. 論文 [2] では, 1 回の $C_n$-move で移り合う二つの結び目 $L, L'$ に対し, $a_n(L)$ と $a_n(L')$, $V^{(n)}(L)$ と $V^{(n)}(L')$ の間にある関係について結果を得た. それまで, 二つの絡み目が $C_n$-move で移り合うための必要条件を多項式不変量で直接表すということはあまり考えられていなかったが, この結果を用いることで, 二つの絡み目が $C_n$-move で移り合わないことの証明が容易にできるようになった.

結び目に関しては, $C_n$-move と Vassiliev 不変量の間のより深い関係が, Habiro らにより証明されている: $S^3$ 内の 二つの結び目 $K, K'$ が有限回の $C_{n+1}$-moves で移り合うための必要十分条件は, 位数が $n$ 以下の任意の Vassiliev 不変量 $v$ に対し, $v(L)=v(L')$ が成り立つことである.

この結果は, $n\geq 2$ のとき, 絡み目に対しては成り立たないが, 論文 [3] の中で, $C_n$-move の特別なものとして $SC_n$-move というものを定義し, $n=2,3$ のとき, 二つの絡み目 $L, L'$ が有限回の $C_{n+1}$-move と $SC_n$-move で移り合うことと, 位数が $n$ 以下の任意の Vassiliev 不変量 $v$ に対し, $v(L)=v(L')$ となることが同値であることを示した (ただし, $n=3$ のときは 2 成分絡み目の場合に限る).

また, 準備中の論文の中で, $SC_n$-move で移り合う二つの絡み目の多項式不変量の関係に関する結果も得ている.

学術論文

[1] *Unknotting operations of polygonal type*, Tokyo Jour. Math.,Vol. **15** (1992), 111-121.

[2] *$C_n$-moves and polynomial invariants for links*, Kobe Jour. Math.,Vol. **17**, (2000), 99-117.

[3] *$C_n$-moves and $V_n$-equivalence for links*, preprint (2003).