

トポロジー新人セミナー2004

日程：2004年8月1日～2004年8月4日

場所：蔵王温泉エコーホテル

はしがき

トポロジー新人セミナー2004は、21世紀COEプログラム『結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成』の一部補助を受けて、2004年8月1-4日に蔵王温泉エコーホテルにて開かれました。参加者は大学院生・助手41名および山形大学理学部助教授・内田吉昭さんと橋本でした。参加したすべての大学院生が、それぞれが現在研究していることについて発表をし、それをめぐって活発な質疑応答がおこなわれました。最後に橋本が『ガロア-プラトン対応について』という講演をしました。内容は、有限体の元を成分とする2行2列の行列のなす群が『小さい』集合に作用するとき、そこに正多面体の対称性があらわれるというもので、おそらくガロアが知っていたことです。

特に異なる大学に所属する大学院生どうしの間でそれぞれ有益なコミュニケーションがもたれたように見受けられました。日頃から結び目理論を中心に、大学院生も参加する研究集会やセミナーが盛んなこともその一因であろうと思います。

2004年12月

橋本義武

大阪市立大学大学院理学研究科

目 次

橋本 義武	ガロア-プラトン対応について	1
飯田 修一	不変量と Dedekind- 関数	2
市川 健司	Seiberg-Witten 理論とその周辺	5
今沢 慶	リーマン幾何とその周辺	6
岩切 雅英	UNKNOTTING NUMBERS OF SURFACE LINKS AND QUANDLE COCYCLE INVARIANTS	7
尾上 和也	最小交点数の絡み目への変形について	8
加治佐 博幸	Lusternik-Schnirelmann カテゴリー、 特に Lie 群の cone-decomposition	10
蒲谷 祐一	双曲多様体の不変量について	11
川見 将広	On the spin-preserving symplectic group modulo two	14
栗屋 隆仁	普遍摂動的な不変量について	15
黒木 慎太郎	Transformation groups	16
古宇田 悠哉	3次元多様体の組合せ構造と Reidemeister トーション	18
佐藤 隆夫	自由群の自己同型群と写像類群	19
新庄 玲子	RESEARCH OF SPATIAL GRAPHS IN TERMS OF KNOT THEORY	27
杉村 真之助	フォックスの結び目理論入門	28
高橋 祐貴	Descriptions on surfaces in four-space, 1 Normal form	29
田所 勇樹	超楕円曲線の周期	30
田中 心	図式的観点による曲面結び目理論の研究	37
玉木 良	グラフ理論・数学教育について	40

丹下 基生	Kirby calculus と微分構造	41
辻 和典	自明なジョーンズ多項式をもつ非自明な仮想結び目について	42
辻川 圭治	様々な結び目における Dehn surgery について	43
土屋 秀典	三次元多様体	44
戸田 一平	Knot Theory	45
富沢 宗平	Kawauchi's second duality	46
中西 清孝	Kauffman bracket skein module とその周辺につい	48
野沢 啓	研究・勉強の紹介	51
畑田 英和	Hyperbolic Scissors Congruences and Hyperbolic Volume	52
藤井 謙一	微分位相幾何学と特異点について	61
藤川 貴史	Mostow rigidity and Simplicial Volume	62
藤原 謙一	Admissible な絡み目に付随した変形操作	69
松田 能文	円周に作用する群について	70
松本 美保	4次元位相多様体	72
宗貞 亜由美	曲面の基本群	73
村井 智美	最近勉強していること	74
村井 紘子	結び目の補空間に入る foliation の depth について	75
森内 博正	-曲線と手錠型グラフの数え上げ	77
山下 温	無限次元トポロジー	78
山田 恭大	反復積分	79
山本 恭平	結び目理論を勉強し始めて	82
吉永 哲雄	Compact Riemann Surfaces	83
ZHANG Gengyu	On Low Dimensional Topology	84

ガロア-プラトン対応について

大阪市立大学大学院理学研究科 橋本 義武

q を素数べき, \mathbb{F}_q を位数 q の有限体とする. 群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ は射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ すなわち $q+1$ 点集合に推移的に作用する. ガロアはその遺書の中に次の主張を書き残した.

「 $q > 11$ ならば, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ が元の個数 $\bullet q$ の集合に推移的に作用することはない。」

彼は, $q \bullet 11$ ではそうではないということも知っていたに違いない. 作用のイソトロピー部分群として, 正多面体 (プラトン立体) の自己同型群があらわれるということも.

η 不変量と Dedekind- η 関数

飯田 修一

東京大学大学院数理科学研究科修士課程 2 年

§0. Introduction

M を Riemann 多様体とする.

この時 M の微分形式の空間に作用する符合数作用素と呼ばれる一階の楕円型微分作用素 D が定まる. $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を D のスペクトラムとする.

$$\eta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sign} \lambda_n}{|\lambda_n|}$$

は Riemann 多様体 M の η 関数と呼ばれ、歴史的には、Atiyah-Patodi-Singer [2] により定義された. η 関数は、 $\text{Res } s > 0$ で広義一様絶対収束し、 \mathbb{C} 全体に有理型に解析接続されることが熱核の漸近展開の存在からわかる. さらに $\dim M$ を奇数と仮定すると、 $s = 0$ で正則であることが (例えば Getzler rescaling を用いた議論により) 証明される. $\eta(0)$ は M の η 不変量と呼ばれ、境界付多様体における指数定理の補正項として初め現れた.

一方、

$$\eta(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} q^{\frac{1}{24}} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

は Dedekind- η 関数と呼ばれる古くから研究されてきた対象であり、その重要性は誰もが認めるところであろう. 24 乗すると、重さ 12 の保型形式となることは古典的に知られており、その対数的変換則は Dedekind 自信によって研究された.

この (名前は偶然にも同じだが、) 起源のことなる二つの関数と不変量が、楕円曲線の普遍族を通じてつながるといのが本稿のテーマであり、その拡張・類似・高次元化を見いだすことが筆者の主な研究テーマである.

§1. 楕円曲線の普遍族と行列式直線束

$$\mathcal{E} := \prod_{\tau \in H} E_{\tau} \rightarrow H$$

を楕円曲線の普遍族とする. ここで、 H は上半平面であり、 $E_{\tau} = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau$ である. 各 E_{τ} には正規化された Ricci-flat 計量が

$$g^{E_{\tau}} := \frac{1}{\text{Im} \tau} |dz|^2$$

で定まり、符合数作用素の族 $\{D_{\tau}\}_{\tau \in H}$ が定まる. この時、 H 上の複素直線束

$$\mathcal{L} := \prod_{\tau \in H} \det(\text{Ker} D_{\tau}) \otimes \det(\text{Coker} D_{\tau})^{-1} \rightarrow H$$

は行列式直線束 (determinant line bundle) と呼ばれ、 $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ が自然に \mathcal{E} に作用することから、同変 $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ 直線束となる. さらに \mathcal{L} には Quillen 計量 (以下そのノルムを $\|\cdot\|_Q$ とおく.) と呼ばれる自然な計量と、Quillen 計量と compatible な接続 ∇ が入ることが知られている.

一方上半平面 H の cotangent bundle を TH^* とおくと、自然に $SL(2, \mathbb{Z})$ 同変正則直線束となる。さらに、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、

$$A^*d\tau = \frac{1}{(c\tau+d)^2}d\tau$$

に注意すると、 $\eta(\tau)d\tau^6$ は TH^{*6} の $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変正則切断を与えることが分かる。以上のような状況下で次の3つの事実が成立することが、 η 不変量と Dedekind- η 関数を結ぶ最初の鍵である。

(事実その1) $SL(2, \mathbb{Z})$ 同変正則直線束として

$$\mathcal{L}^* \cong TH^*$$

証明は Serre dual および Kodaira-Spencer 写像が同型になることを用いれば、容易である。また、行列式直線束の曲率公式を適用することで、

(事実その2)

$$(\mathcal{L}, \nabla) \text{ は平坦直線束}$$

が直ちに示される。そしてより本質的なのが以下の事実である。

(事実その3) $\eta(\tau) \in H^0(H, \mathcal{L}^{*6})$ と見なすと、

$$\|\eta(\tau)\|_Q \equiv 1$$

Ray-Singer による楕円曲線の解析的 torsion の計算から導かれる上記の事実は多様体のスペクトラムから数論敵な関数が出てくるという点においてすこぶる興味深い。

以上により Dedekind- η 関数の対数的変換則を求める問題が、行列式直線束の対数的 monodromy を求める問題とつながった。以下、行列式直線束の monodromy と η 不変量と関連付ける Bismut-Freed の結果について述べる。

§2. η 不変量の断熱極限と Witten のホロノミー定理

まず状況設定から話を始める。

$\pi : M \rightarrow S^1$ を Riemann 多様体の一次元の族とする。 g_{M/S^1} をファイバーの計量とし、

$$g_M^\epsilon := g_{M/S^1} + \epsilon^{-1}g_{S^1}$$

とおき、対応する符号数作用素を D^ϵ 、 η 不変量を $\eta^\epsilon(0)$ とおく。

(\mathcal{L}, ∇) を行列式直線束とすると以下の定理が成立する。

定理 (Bismut-Freed[3]) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta^\epsilon(0) =: \eta^0$ が存在し、

$$\exp(\pi i \eta^0) = \text{hol}(\mathcal{L}, \nabla)$$

ここで hol は直線束 \mathcal{L} の ∇ に関するホロノミーである。

§3. まとめ

以上のより、トーラスの写像トーラスの η 不変量と Dedekind- η 関数の間に不思議な深い関係があることが、おぼろげながら推察されることと思う。Atiyah はさらに Meyer 関数、清水 L 関数との関連も論文 [1] で考察し、その一般化の可能性も示唆している。現在までのところ、あるものは一般化され、あるものは一般化の定式化すら不明なままである。詳しくは原論文を直接参照されたい。

参考文献

[1] Atiyah, M.F. : *Logarithm of the Dedekind- η Funktion*. Math. Ann. 278, 335-380 (1987)

[2] Atiyah, M.F., Patodi, V.K., Singer, I.M.: *Spectral asymmetry and Riemannian geometry*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77, 43-69 (1975)

[3] Bismut, J.M., Freed, D.S.: *The analysis of elliptic families* Comm. math. Phys. 106, 107, 159-176, 103-163 (1986)

Seiberg-Witten 理論とその周辺

市川健司 (東京工業大学大学院理工学研究科 M1)

4次元位相多様体上の様々な問題は、ドナルドソン以降、解析的な手法を用いて幾つか解かれました。当初はゲージ理論から派生したものでしたが、このゲージ理論には様々な困難が常に付きまといます。当時の研究者達は非常に苦労されていたようです。その研究のさなかにウィッテンによってモノポール方程式がもたらされました。

現在僕が勉強しているのは、主にゲージ理論とこのサイバークウィッテン理論の共通性です。なぜこの研究かという、サイバークウィッテン理論を用いれば、ゲージ理論よりも解析的な部分において簡単なものになるようです。この事は僕にとってはまだ研究途中の事なので詳しくは分かりません。2つの理論はともにある偏微分方程式の解空間のモジュライとして得られる空間についての研究ということですが、幾何的な手法をいくつも用いて理論を展開するので、そのための準備が色々必要となります。どんな手法が有効になるか分かりませんが、様々な理論からの応用を期待できると思うので、これから数年の間に大きな進歩があることを願いつつ頑張っていこうと思います。

リーマン幾何とその周辺

今沢 慶 (東京工業大学理工学研究科数学専攻 M1)

四年生のときから、M1の四月か五月くらいまで、

do Carmo 「Riemannian Geometry」

を、読んでいました。内容に関しては、リーマン幾何の標準的な教科書と思われませんが、球面定理が目標になっていると思います。球面定理は、多少の位相的性質(完備、コンパクト、単連結)は仮定しますが、曲率の仮定から、出てくる結果が、球面と同相という位相的な性質が出てくるという所に不思議さを感じました。

現在は

Lohkamp 「Metric of negative Ricci curvature」Ann.of.Math.140

を読んでいます。これは、どのような論文かと言いますと、現在、読んでいる最中なので、詳しくは分かりませんが、3次元以上の次元を持つ任意の多様体に負の Ricci 曲率を与えるリーマン計量が入ることを言っているようです。僕がこの論文で注目したいのは、任意の多様体にリッチ負の計量を入れる過程が、どのような過程で入れるのかに注目しています。その結果、ある多様体を固定したときに、その多様体上のリーマン計量全体の空間の構造のようなものが分かれば、面白いかなと思っています。また、個人的に興味を持っている分野としては、物理にも多少興味を持っているので不定値計量を持つ多様体にも興味を持っています。また、ハウスドルフ収束、と言うよりは、グロモフ - ハウスドルフ距離にも興味を持っています。

これから先、どの分野を研究していくかは、まだ決めてはませんが、計量を用いて、多様体の様々な性質を見ていきたいと思っています。詳しくは知らないのですが、ポアンカレ予想が、微分幾何の手法を用いて解けたらしい(ジャッジの結果がでたのかは知りませんが)という話を聞いて、他にも、微分幾何の手法で、トポロジーの情報を得る手段があるのかどうかという事に興味があるので、何か情報が得られないかと、今回のトポロジー新人セミナーに期待しています。

UNKNOTTING NUMBERS OF SURFACE LINKS AND QUANDLE COCYCLE INVARIANTS

MASAHIDE IWAKIRI

*Department of Mathematics Hiroshima University
Hiroshima 739-8526, JAPAN*

iwakiri@hiroshima-u.ac.jp

F. Hosokawa and A. Kawauchi proved that any surface link S can be deformed to unknotted one by attaching a finite number of 1-handles to S (cf. [3]). The unknotting number was often studied by Alexander invariants (cf. [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]). On the other hand, recently, quandle cocycle invariants [1, 2] of surface links were introduced and applied to non-invertibility, triple point numbers and so on. In this talk, we will give the lower bound of unknotting numbers by quandle cocycle invariants, so that determine the numbers of some surface links.

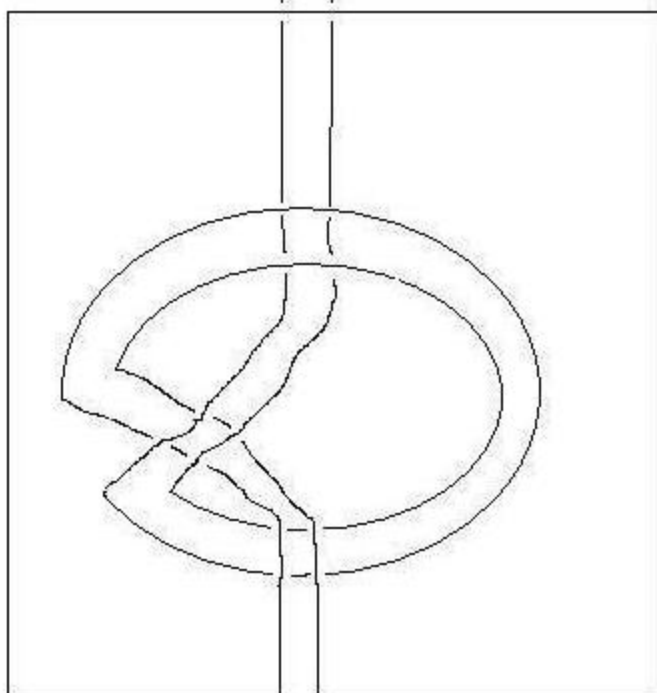
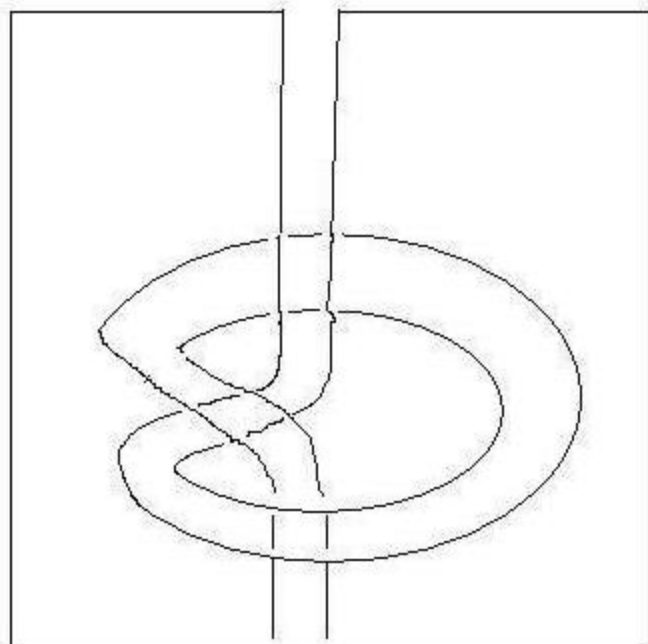
REFERENCES

- [1] J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. Graña and M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle cohomology*, preprint.
- [2] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355** (2003), 3947-3989.
- [3] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, *Osaka J. Math.*, **16** (1979), 233-248.
- [4] F. Hosokawa, T. Maeda and S. Suzuki, *Numerical invariants of surfaces in 4-space*, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, **7** (1979), 409-420.
- [5] S. Kamada, *Unknotting immersed surface-links and singular 2-dimensional braids by 1-handle surgeries*, *Osaka J. Math.*, **36** (1999), 33-49.
- [6] T. Kanenobu, *Weak unknotting number of a composite 2-knot*, *J. Knot Theory Ramifications*, **5** (1996), 171-176.
- [7] T. Kanenobu and Y. Marumoto, *Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots*, *Osaka J. Math.*, **34** (1997), 525-540.
- [8] A. Kawauchi, *On pseudo-ribbon surface links*, *J. Knot Theory Ramifications*, **11** (2002), 1043-1062.
- [9] K. Miyazaki, *On the relationship among unknotting number, knotting genus and Alexander invariant for 2-knot*, *Kobe J. Math.*, **3** (1986), 77-85.
- [10] S. Satoh, *A note on unknotting numbers of twist-spun knots*, preprint.

最小交点数の絡み目への変形について

尾上和也 (神戸大学大学院理学研究科 M1)

任意の絡み目は、ライデマイスター移動により、最小交点数の絡み目に変形させることができます。このとき、多くの場合は適当に交点数を減らしていく操作で、最小交点にすることが出来ます。では、交点数を増やさなければ最小交点数の絡み目に、できないものはどのようなものがあるか、またどのような性質があるかということを研究しています。例として、図の結び目はパッと見て自明な結び目になることがわかりますが、これは、どのように変形しようとしてもまず交点をふやさないと、自明な結び目にする事ができません。



Lusternik-Schnirelmann カテゴリー、特に Lie 群 の cone-decomposition

加治佐 博幸 (東京工業大学理工学研究科数学専攻)

Lusternik-Schnirelmann カテゴリー (短くは L-S カテゴリー) はホモトピー不変量である。歴史的には、これは Lusternik と Schnirelmann によってコンパクト可微分多様体上の Morse 関数の特異点の個数の下界として導入されたものである。位相空間 X の L-S カテゴリー $\text{cat}(X)$ は

$$\text{cat}(X) = \min\{ n \mid X = \bigcup_{k=0}^n U_k, \ U_k \text{ are open and contractible in } X \}$$

で定義される。

色々な位相空間の L-S カテゴリーを求めることは簡単な問題ではない。そのために L-S カテゴリーに関連する他の不変量を利用する。例えば、L-S カテゴリーを下から評価することができるホモトピー不変量に cup-length がある。上からの評価することができる位相不変量に幾何学的カテゴリー $\text{gcat}(X)$ がある。これは

$$\text{gcat}(X) = \min\{ n \mid X = \bigcup_{k=0}^n U_k, \ \text{each } U_k \text{ is open and contractible in itself} \}$$

で定義される。位相空間 X に対し $\min_{X \simeq Y} \text{gcat}(Y)$ を X の強 L-S カテゴリーと言い、 $\text{Cat}(X)$ と書く。この様に定義することにより、強 L-S カテゴリー $\text{Cat}(X)$ はホモトピー不変量になる。cone-decomposition とは強 L-S カテゴリーを求めるための道具であり、与えられた位相空間の cone-decomposition を具体的に構成することにより強 L-S カテゴリーを上から評価できる。これは L-S カテゴリーを上から評価することにもなる。

一見、L-S カテゴリーさえ得られれば cone-decomposition を構成する必要がないように感じるが、たとえ L-S カテゴリーが知られていても改めて cone-decomposition を構成することにも意味がある。なぜなら、それは位相空間の幾何学的な性質を反映していることがあるからである。例えば、ユニタリ群の L-S カテゴリーは Singhof によって $\text{cat}(U(n)) = n$ と決定されていたが、その cone-decomposition は知られていなかった。その後、私が構成したユニタリ群の cone-decomposition は、良く知られている横田の胞体分割や Miller の filtration と密接に結び付いていた。横田の胞体分割との関連により cup-length との関わりが良く理解できるようになり、Miller の filtration との関連により具体的に Morse 関数との関わりが見えた。

双曲多様体の不変量について

蒲谷 祐一（東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻 修士2年）

私が最近勉強していることについて簡単に述べる。

完備3次元多様体で有限体積であるものを考える。これは上半空間 $H^3 = \{(x, y, z) : z > 0\}$ を $PSL(2, C)$ の torsion free な離散部分群 Γ で割ったものになる。つまり H^3/Γ と書ける。[3], [1] によれば次の完全系列がわかる。

$$0 \rightarrow Q/Z \rightarrow H_3(PSL(2, C)) \rightarrow P(C) \rightarrow C^* \wedge C^* \rightarrow H_2(PSL(2, C)) \rightarrow 0$$

ここで $H_i(PSL(2, C))$ は $PSL(2, C)$ の群のホモロジーを考えている。また体 F に対して $P(F)$ は

$$P(F) = \left\{ \sum n_i [z_i] \mid n_i \in Z, z_i \in C^* - \{1\} \right\} / R$$

$$R = \{ [x] - [y] + [y/x] - [(1-x^{-1})/(1-y^{-1})] + [(1-x)/(1-y)] \}$$

で定義される。また $B(F)$ を

$$\lambda : P(F) \rightarrow F^* \wedge F^*$$

$$[z] \rightarrow 2(z \wedge (1-z))$$

$$B(F) = Ker \lambda$$

で定義する。これを Bloch 群とよぶ（定義がいろんな論文で異なる）[8], [6]。すると上の完全系列は

$$0 \rightarrow Q/Z \rightarrow H_3(PSL(2, C)) \rightarrow B(C) \rightarrow 0$$

と書ける。 Γ に対しても $M=H/\Gamma$ が compact ならば、 $H_3(\Gamma)$ は Z と同型であり生成元を $[M]$ と書く。 $\Gamma \subset PSL(2, C)$ から誘導される写像 $H_3(\Gamma) \rightarrow H_3(PSL(2, C))$ の $[M]$ の image を得る。さらにこの元の $H_3(PSL(2, C)) \rightarrow P(C)$ の image を考えるとこの元は完全系列から $B(C)$ の中に入っていることがわかる。この元を $\beta(M)$ と書く。 $P(C)$ から $C \wedge C$ には

$$\rho : P(C) \rightarrow C \wedge C$$

$$\rho(z) = \frac{\log z}{2\pi i} \wedge \frac{\log(1-z)}{2\pi i} + 1 \wedge \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^z \left(\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log t}{1-t} \right) dt$$

によって写像が定まる。これは $B(C) \rightarrow C/Q$ を誘導するが $\rho(\beta(M))$ の虚数部分は M の体積を、実数部分は *Chern – Simon* 不変量をあらわす [1], [2]。

次に有限体積双曲多様体で *noncompact* なものを考える。今度は $H_3(\Gamma)$ に基本類がないので前の構成法は使えない。しかしこの多様体に *ideal triangulation* が与えられていたならば *ideal geodesic simplex* は複素数のパラメータ z_i で特徴付けられる [9]。ここで複素数のパラメータから Bloch 群の元を定めることができる。実際 $\beta(M) = \sum [z_i]$ とおくとこれは *triangulation* のとり方によらない M の不変量となる。この構成法は実は *compact* な場合にも定義できる。一方このように定義した場合 $\beta(M)$ の元を C よりも小さい体 F で定義された $B(F)$ の元として表せる。 F として Reid によって定義された *invariant trace field* $k(M)$ が取れる [7], [4]。これは定義は簡単で $M = H/\Gamma$ に対して $tr(\gamma)^2 (\gamma \in \Gamma)$ で生成される Q 上の体とする。(これは *commensurable* な部分群で不変である事がわかるがここでは特に使わない。)

$$D_2(z) = \log|z| \arg(1-z) - \text{Im} \int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt$$

とするとこれは $P(C)$ から R への写像を定める。とくに $D_2(\beta(M))$ は M の双曲体積を表す。さらに

$$B(F) \rightarrow R^{r_2}$$

$$[z] \rightarrow (\sigma_1(z), \dots, \sigma_{r_2}(z))$$

とする。ただし σ_i は F の C への埋め込みで $\not\subset R$ となるものをあらわす (複素共役で移りあうもののうちの片方を取ってくる)。これは $B(F) / \text{Tor}$ を R^{r_2} の格子に移す (Borel)。[6] ではこの写像を用いてある種の双曲多様体について *Chern-Simons* 不変量の有理性を示している。

参考文献

- [1] J.L. Dupont, Scissors congruences, group homology and characteristic classes
- [2] J.L. Dupont, The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles, Ill. J. Math. 34(1987)
- [3] Dupont-Sah, Scissors congruences 2, J. Pure. and Appl. Algebra 25(1982)
- [4] Maclachlan-Reid, The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds, GTM219
- [5] Neumann, Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class, Geometry and Topology 8(2004)

- [6] Neumann-Yang, Problem for K-theory and Chern-Simons invariants of hyperbolic 3-manifolds, L'Ens. Math. 41(1995)
- [7] Neumann-Yang, Bloch invariants of hyperbolic 3-manifolds, Duke Math. J. 96(1999)
- [8] Suslin, K3 of a field and the Bloch group, Proc. Steklov Inst. of Math. (1991)
- [9] Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds

On the spin-preserving symplectic group modulo two

川見将広 (大阪市立大学大学院理学研究科 D2)

kawami@sci.osaka-cu.ac.jp

Let Σ_g be the closed orientable surface and assume that it is embedded in the 4-sphere trivially, i.e., it bounds a handlebody in the 4-sphere. Let SP_g be the subgroup of the mapping class group of Σ_g which consists of the isotopy classes of self-diffeomorphisms of Σ_g extending to self-diffeomorphisms of the 4-sphere. The mapping class group of Σ_g induces the automorphism group $Sp(2g; Z/2Z)$ on the first homology group of Σ_g in Z_2 coefficients, called the *Z_2 -symplectic group*. The group SP_g induces a subgroup of $Sp(2g; Z/2Z)$, called the *spin-preserving Z_2 -symplectic group*.

I am working on a characterization of this subgroup. And I am trying to find a relationship between the topological symmetry group of some spatial graph and this group.

普遍摂動的不変量について

栗屋 隆仁

(九州大学大学院数理学府数理学専攻博士課程一年¹)

位相幾何学、特に、結び目、絡み目、三次元多様体の量子不変量に興味を持っている。私はこれまで一貫して普遍摂動的不変量 (LMO 不変量) について研究してきている。絡み目の量子不変量は Kontsevich integral により統一的に表示できることが知られている。三次元多様体の量子不変量は絡み目の量子不変量を用いて定義できることを考えると、三次元多様体の量子不変量に対しても同様の普遍性が期待されていた。この普遍性を実現した不変量が LMO 不変量である。修士論文“ On the LMO conjecture ”において LMO 不変量の摂動的 G 不変量に対する普遍性 (LMO 予想) を示した。葉廣和夫氏と T.T.Q. Le 氏の結果をあわせると LMO 不変量により整係数ホモロジー 3 球面のすべての量子不変量は一つの不変量によって統合されたことになる。

Theorem (LMO 予想). 任意の単連結単純 Lie 群 G に対して、 \hat{Z}^{LMO} は τ^{PG} を再現する。

このことから LMO 不変量は強力な不変量であることが想像され、LMO 不変量は整数係数ホモロジー 3 球面を分類すると予想されている。しかしながら、この問題に対する具体的なアプローチは現在ほとんど見当たらない。そこでこの問題に対して以下のようなアプローチを提起したい。P. Røgen によって、“結び目の有限型不変量 (Vassiliev 不変量) が結び目を分類することと、Vassiliev 不変量が結び目の不変量たちのなす空間において稠密であること”が同値であることが示されている。現在私が最も興味を持っており提起したいと考えている問題はこれの 3 次元多様体版とも言うべき問題である。すなわち、

Conjecture. 整数係数ホモロジー 3 球面の有限型不変量が整数係数ホモロジー 3 球面を分類する \iff 有限型不変量が整数係数ホモロジー 3 球面の不変量のなす空間において稠密である

という予想について考察したい。この予想の肯定的解決は、T.T.Q.Le による有限型不変量に対する LMO 不変量の普遍性定理によって、“LMO 不変量が整数係数ホモロジー 3 球面の完全不変量であること \iff 有限型不変量が整数係数ホモロジー 3 球面の不変量のなす空間において稠密であること”を意味することを強調したい。結び目の場合の証明では結び目のある局所変形の族を考えることによりその証明がなされている。大雑把に言うとこれに相当するような整数係数ホモロジー 3 球面の変形族の構成がその証明を与えると考えられる。また、この問題に取り組む別の方向性として、現在具体的に知られている不変量を有限型不変量で近似して構成すること、すなわち、この問題の肯定的証拠を具体的に見つけることも興味深い問題である (私の知る限りそのような具体例はまだ見つかっていない)。

Remark . 上の予想の必要性は比較的容易に示せる。つまりあとは十分性だけが問題である。

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

E-mail address: marron@math.kyushu-u.ac.jp

¹日本学術振興会特別研究員

Transformation groups

Shintarô KUROKI *

First I mention the definition of the transformation group on a manifold.

Definition Let G be a Lie group, M be a manifold and ϕ be a map from $G \times M$ to M ($\phi : G \times M \rightarrow M$). Then we call ϕ an *action* on M if the following properties hold

$$\phi(e, x) = x \quad (1)$$

$$\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x) \quad (2)$$

where e is an identity of G . Then we call the group G a *transformation group* on M . If this map ϕ is smooth, then we call it a *smooth action*.

In [1], the author constructed the smooth actions of $SL(m, \mathbf{H}) \times SL(n, \mathbf{H})$ on $S^{4(m+n)-1}$ where \mathbf{H} means a quaternion.

In [2], the author classified the compact transformation groups G on complex quadric Q_{2n} which has codimension one orbit, where

$$Q_{2n} = \{z \in P_{2n+1}(\mathbf{C}) \mid z_0^2 + \dots + z_{2n+1}^2 = 0\} \simeq SO(2n+2)/SO(2n) \times SO(2).$$

He got the following result

Theorem 1 (G, M) is isomorphic to one of the pairs in the following list.

n	(G, M)	<i>action</i>
$n \geq 2$	$(SO(2n+1), Q_{2n})$	<i>canonical</i>
$n \geq 2$	$(U(n+1), Q_{2n})$	$U(n+1) \rightarrow SO(2n+2)$
$n \geq 2$	$(SU(n+1), Q_{2n})$	$SU(n+1) \rightarrow SO(2n+2)$
$n \geq 1$	$(Sp(1) \times Sp(n), Q_{4n-2})$	$Sp(1) \times Sp(n) \rightarrow SO(4n)$
7	$(Spin(9), Q_{14})$	$Spin(9) \rightarrow SO(16)$
3	(G_2, Q_6)	$G_2 \rightarrow SO(7)$
2	$(S(U(3) \times U(1)), Q_4)$	$S(U(3) \times U(1)) \rightarrow SO(6)$

*Department of Mathematics, Osaka City University, Sumiyosi-Ku, Osaka 558-8585 Japan (e-mail address: d03sa004@ex.media.osaka-cu.ac.jp). The author was supported by Fellowship of the Japan Society for the Promotion of Science.

In [3], the author solved the following problem in [4].

Problem 1 *Put the action ϕ of $SO(3)$ on S^4 as $\phi(A, X) = A^t X A$ where $A \in SO(3)$ and $X \in \{A \in M_3(\mathbf{R}) | A^t = A, Tr(A) = 0, Tr(A^t A) = 1\} = S^4$. Does this action extend to a smooth $SL(3, \mathbf{R})$ action ?*

The key fact is $P_2(\mathbf{C})/conj \simeq S^4$ where the *conj* means complex conjugation. The author solved the problem from this fact.

References

- [1] S.Kuroki, On the construction of smooth $SL(m, \mathbf{H}) \times SL(n, \mathbf{H})$ -actions on $S^{4(m+n)-1}$, Bull. of Yamagata Univ. Nat. Sci. 15-3(2003).
- [2] S.Kuroki, Classification of compact transformation groups on complex quadric with codimension one orbit, preprint.
- [3] S.Kuroki, On the $SL(3, \mathbf{R})$ action on S^4 , preprint.
- [4] F. Uchida: Construction of a continuous $SL(3, \mathbf{R})$ action on 4-sphere, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 21 (1985), 425-431.

3次元多様体の組合せ構造と Reidemeister トーション

古宇田悠哉 (慶應義塾大学大学院理工学研究科 M2)

アブストラクト: 3次元双曲的多様体の中で堆積が最小であると予想されている Fomenko Matveev Weeks manifold を含む、Heegaard genus 2 の多様体の系列を取り出し、その組合せ構造を研究している。また、同時に Reidemeister torsion という不変量について、その計算方法や性質を研究している。特に、最近では、双曲的多様体のホロノミー表現から得られる非可換な torsion に興味を持ち、勉強を進めている。

トポロジー新人セミナー 2004 報告集
自由群の自己同型群と写像類群

東京大学大学院数理科学研究科 佐藤 隆夫*

概要: 私の主たる研究対象は自由群の自己同型群である。特に曲面の写像類群との関係を、組み合わせ群論的な手法を用いて (コ) ホモロジーの立場から調べることに興味を持っている。修士論文では、自由群の自己同型群のねじれ係数 1 次元ホモロジー群に関する考察と、IA-自己同型群と呼ばれる、自由群の自己同型群のある正規部分群に関する考察を行った。以下はその要約である。

1 自由群の自己同型群のねじれ係数 1 次元ホモロジー群

近年, Culler, Vogtmann らによって, Outer space や Auter space の概念が定式化され, これを用いた位相幾何学的な議論により, 自由群の自己同型群, 及び外部自己同型群等の有理自明係数 (コ) ホモロジー群が, まだ不完全ながらも, 解明されつつある。しかしながら, 一方で, これらの群のねじれ係数の (コ) ホモロジー群に関してはまだ殆ど計算されていないというのが現状である。一方, 森田茂之氏 [10] によって, 種数 g , かつ, 1 つの境界成分を持つような向き付けられた曲面 $\Sigma_{g,1}$ の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ を, $\Sigma_{g,1}$ の 1 次元ホモロジー群 $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$ に作用させた場合の, ねじれ係数 1 次元ホモロジー群が計算されている。そこで私は, これの対応物として自由群の自己同型群を自由群のアーベル化に作用させた場合のねじれ係数 1 次元ホモロジー群を計算して, 森田茂之氏によって得られている結果との関係を考察してみようと考えた。

$n \geq 2$ とする。 F_n を階数 n の自由群とし, $\text{Aut } F_n$ を F_n の自己同型群とする。 H を F_n のアーベル化とし, $H^* = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(H, \mathbf{Z})$ を H の双対加群とする。すると, $\text{Aut } F_n$ は自然な写像 $\rho: \text{Aut } F_n \rightarrow \text{Aut } H \simeq GL(n, \mathbf{Z})$ を通して H に作用する。さらに, F_n の内部自己同型群 $\text{Inn } F_n$ は $\ker(\rho)$ に含まれるので $\text{Out } F_n = \text{Aut } F_n / \text{Inn } F_n$

*takao@ms.u-tokyo.ac.jp

も自然に H へ作用する．このとき，次のような結果が得られた．

定理 1 $n \geq 2$ のとき，以下のことが成り立つ．

(1) $\Gamma_n = \text{Aut } F_n$ に対して，

$$H_1(\Gamma_n, H) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \geq 4, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } n = 3, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } n = 2 \text{ and } \Gamma_2 = \text{Aut } F_2, \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } n = 2 \text{ and } \Gamma_2 = \text{Aut}^+ F_2, \end{cases}$$

$$H_1(\Gamma_n, H^*) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{if } n \geq 4, \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } n = 2, 3. \end{cases}$$

(2) $\Omega_n = \text{Out } F_n$ に対して，

$$H_1(\Omega_n, H) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \geq 4, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } n = 2, 3, \end{cases}$$

$$H_1(\Omega_n, H^*) = \begin{cases} \mathbf{Z}/(n-1)\mathbf{Z} & \text{if } n \geq 4, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } n = 3, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{if } n = 2. \end{cases}$$

この結果から， $n \geq 4$ の場合は (コ) ホモロジー群は安定的であり，一方， $n = 2, 3$ の場合には非安定的な 2-torsion が現われることが分かった．また，森田茂之氏 [11] によって得られている写像類群に対する同様の結果の対応として， $H^1(\text{Aut}^+ F_n, H) = \mathbf{Z}$ の生成元が，自由群の自己同型群の Magnus 表現を用いて記述できることも分かった．従って，Nielsen [13] によって得られている自然な写像 $\mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \text{Aut}^+ F_{2g}$ はコホモロジー群の同型 $H^1(\text{Aut}^+ F_{2g}, H) \rightarrow H^1(\mathcal{M}_{g,1}, H)$ に拡張することが分かる．

現在では，高次元，特に 2 次元の (コ) ホモロジー群，及び，係数を $GL(n, \mathbf{Q})$ の全ての既約表現にした場合の 1 次元の (コ) ホモロジー群が計算できないか思索中である．

2 有限表示を持つ群のねじれ係数 2 次元コホモロジー群の計算について

私は自由群の自己同型群（これは有限表示群）のねじれ係数の (コ) ホモロジー群を考察している立場から，群の表示を調べることで，2 次元のコホモロジーについての

情報がある程度取り出せないかということ考えてみた．一般に，群 G と G 加群 M が与えられているとき，群の 2 次元コホモロジー $H^2(G, M)$ を計算するのは非常に難しい．

今， G には有限表示 $G = \langle X | S \rangle$ が与えられているとする．また， F を X 上の自由群とし， R を S の F における正規閉包とする．このとき，有理整数のなす加法群 \mathbf{Z} を自明な G 加群とみなせば，2 次元ホモロジー群に関してはよく知られた Hopf の公式

$$H_2(G, \mathbf{Z}) \simeq (R \cap [F, F]) / [F, R]$$

が成り立つ．一方， M を非自明な G 加群とすると， G の M 係数 2 次元コホモロジー群 $H^2(G, M)$ の計算については一般的なアルゴリズム等も知られておらず，大変困難である．本論文では，有限表示が与えられた群 G と G 加群 M に対して，組み合わせ群論を用いてねじれ係数 2 次元コホモロジー群を計算するための新しい手法を紹介する．さらに，この方法を良く知られている群（例えば，正二面体群 D_n ，特殊線型群 $SL(2, \mathbf{Z})$ ，3 次のブレイド群 B_3 など）に適用して 2 次元のコホモロジー群を計算してみた．以下，結果を述べる前に次の記号を確認しておく．

G を群， M を G 加群とすると， G の \mathbf{Z} 上の群環を $\mathbf{Z}[G]$ で表す．このとき，任意の $\alpha \in \mathbf{Z}[G]$ に対して，

$$\begin{aligned} M^\alpha &= \{m \in M \mid \alpha \cdot m = m\}, \\ \alpha M &= \{\alpha \cdot m \in M \mid m \in M\}, \end{aligned}$$

とおく．ここで， $\alpha \cdot m$ は α の m への作用を表す．

命題 1 $n \geq 1$ として， D_n を位数が $2n$ の正二面体群とする． D_n は有限表示

$$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$$

を持つことが知られている．このとき，任意の D_n 加群 M に対して，

$$H^2(D_n, M) \simeq L/K$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned} L &= \left\{ (a, b, c) \in M^\sigma \oplus M^\sigma \oplus M^\tau \mid \begin{aligned} nb &= (\tau - (n-1))a, \\ (\tau - 1)a + (\tau - 1)b + (\sigma - 1)c &= 0 \end{aligned} \right\}, \\ K &= \left\{ \begin{aligned} ((1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n-1})s, \\ (1 - \sigma^{n-1})t + (\tau - (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n-2}))s, (1 + \tau)t) \in L \mid s, t \in M \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

命題 2 有理整数環 \mathbf{Z} 上の 2 次の特異線型群 $SL(2, \mathbf{Z})$ を考える . $SL(2, \mathbf{Z})$ は有限表示

$$SL(2, \mathbf{Z}) = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2, \tau^4 = 1 \rangle$$

を持つことが知られている . このとき , 任意の $SL(2, \mathbf{Z})$ 加群 M に対して ,

$$H^2(SL(2, \mathbf{Z}), M) \simeq N/L$$

が成り立つ . ここで ,

$$N = \left\{ (a, d) \in M^\tau \oplus M \mid (1 - \sigma)a = -(1 - \sigma)(1 + \sigma^3)d \right\},$$

$$L = \left\{ ((1 + \tau + \tau^2 + \tau^3)t, (1 + \sigma + \sigma^2)s - (1 + \tau)t) \mid s, t \in M \right\}.$$

命題 3 B_3 を 3 次のブレイド群とする . B_3 は有限表示

$$B_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 \rangle$$

を持つことが知られている . このとき , 任意の B_3 加群 M に対して ,

$$H^2(B_3, M) \simeq M / \left((1 + \sigma + \sigma^2)M + (1 + \tau)M \right)$$

が成り立つ .

この計算結果から , B_3 のコホモロジー次元が 2 であるという , 良く知られた事実の代数的 (組み合わせ群論的) な別証明も得られた . また , B_3 は \mathbf{Z} の $SL(2, \mathbf{Z})$ による中心拡大

$$1 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow B_3 \rightarrow SL(2, \mathbf{Z}) \rightarrow 1$$

として表される . (See [1].) 従って , $SL(2, \mathbf{Z})$ を通して階数 2 の自由群 F_2 のアーベル化 H に作用する . このとき , 上の結果を用いることで , 任意の奇数 m に対して $H^q(B_3, H^{\otimes m})$, ($q \geq 0$) が以下のように計算される .

定理 2 任意の奇数 m に対して ,

$$H^q(B_3, H^{\otimes m}) = \begin{cases} 0 & \text{if } q = 0 \text{ or } q \geq 3, \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{v_m} & \text{if } q = 1, \\ (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{w_m} & \text{if } q = 2, \end{cases}$$

が成り立つ . ここで , $v_m = \frac{1}{3}(2^{m-1} - 1)$, $w_m = \frac{1}{3}(2^m + 1)$ である .

この結果と , 上の中心拡大から誘導される Gysin 系列を考えることによって , 松崎和孝氏 [9] によって得られている , $SL(2, \mathbf{Z})$ に対する結果が得られることも分かった .

3 階数2の合同IA-自己同型群のホモロジー群

第1節で考えた全射準同型 $\rho : \text{Aut } F_n \rightarrow GL(n, \mathbf{Z})$ の核を IA_n と書いて、自由群 F_n のIA-自己同型群という。 IA_n は写像類群における、Torelli 群に対応する群である。Nielsen [12] によって $n = 2$ の場合は $IA_2 = \text{Inn } F_2$ となることが知られているが、 $n \geq 3$ の場合、 IA_n は $\text{Inn } F_n$ に比べてはるかに大きい群であり、群の表示でさえもまだ知られていない。私は $\text{Aut } F_n$ の (コ) ホモロジー群を研究している立場から、特に IA_n の (コ) ホモロジー群、及び、群の表示を与えることに興味を持っている。

さて、 IA_n の “mod p 近似” の群として次のような群を考える。任意の素数 p に対して $\Gamma(n, p)$ を $SL(n, \mathbf{Z})$ の法 p に関する主合同部分群とすると、 $IA_{n,p} = \rho^{-1}(\Gamma(n, p))$ とおき、法 p に関する階数 n の合同IA-自己同型群と呼ぶ。このとき、

$$1 \rightarrow IA_n \rightarrow IA_{n,p} \rightarrow \Gamma(n, p) \rightarrow 1$$

は完全系列であり、

$$IA_n = \bigcap_{p: \text{prime}} IA_{n,p}$$

なる関係がある。そこで、各素数 p に対して $IA_{n,p}$ の性質を調べることで、それらから IA_n の情報が得られないかということを考えてみた。

修士論文では、 $n = 2$ かつ、 p が奇素数の場合について $IA_{2,p}$ の自明係数ホモロジー群 $H_q(IA_{2,p}, \mathbf{Z})$ 、及びねじれ係数ホモロジー群 $H_q(IA_{2,p}, H)$ を計算した。ここで、 H は階数2の自由群 F_2 のアーベル化である。

$n = 2$ の場合は、Frasch [2] によって $\Gamma(2, p)$ は階数 $\alpha(p) = p(p-1)(p+1)/12$ の自由群になることが知られている。一方、 $\text{Inn } F_2$ が階数2の自由群であることを考慮すると、群の拡大 $\Gamma(2, p) = IA_{2,p}/\text{Inn } F_2$ のスペクトル系列を用いることにより、 $IA_{2,p}$ のホモロジー次元が2であることが分かる。以下、計算結果を述べる。

定理 3 任意な奇素数 p に対して

(1)

$$H_q(IA_{2,p}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{if } q = 0, \\ \mathbf{Z}^{\oplus \alpha(p)} \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\oplus 2} & \text{if } q = 1, \\ \mathbf{Z}^{\oplus (2\alpha(p)-2)} & \text{if } q = 2, \\ 0 & \text{if } q \geq 3. \end{cases}$$

(2)

$$H_m(IA_{2,p}, H) \simeq \begin{cases} (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\oplus 2} & \text{if } m = 0, \\ \mathbf{Z}^{\oplus (2\alpha(p)-1)} \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\oplus 3} & \text{if } m = 1, \\ \mathbf{Z}^{\oplus (4\alpha(p)-3)} & \text{if } m = 2, \\ 0 & \text{if } m \geq 3. \end{cases}$$

現在は、これらの結果を一般の $n \geq 3$ で出来ないか思索中である．一方、自由群の自己同型群のマグナス展開を用いた議論によって、河澄響矢氏 [6] により、任意の $n \geq 3$ に対して $GL(n, \mathbf{Z})$ 同変な同型 $H_1(IA_n, \mathbf{Z}) \simeq H^* \otimes \Lambda^2 H$ が成り立つことが知られている．この結果を利用することで、最近、次のような結果が得られた．

定理 4 任意の $n \geq 4, d \geq 3$ に対して

$$H_1(IA_{n,d}, \mathbf{Z}) \simeq H_1(\Gamma(n, d), \mathbf{Z}) \bigoplus (H^* \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda^2 H) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$$

が成り立つ．

特に、 d が奇素数 p である場合には、Lee 及び Szczarba ら [7] によって、 $\Gamma(n, p)$ のアーベル化 $H_1(\Gamma(n, p), \mathbf{Z})$ は、トレースの和が 0 であるような、 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 係数の n 次正方行列全体のなす（行列の加法による）アーベル群と同型であることが知られており、これより次の系を得る．

系 1 任意の $n \geq 4$ 、及び、奇素数 p に対して、 $H_1(IA_{n,p}, \mathbf{Z})$ は p 群であり、 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ベクトル空間としての次元は

$$\dim_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(H_1(IA_{n,p}, \mathbf{Z})) = \frac{1}{2}(n-1)(n^2 - 2n + 2)$$

となる．

現在では、高次元のホモロジー群、もしくは、ねじれ係数の場合に同様の方法で計算できないか研究中である．

4 IA_n のある降下フィルトレーションについて

第 3 節でも述べたように、 F_n の IA-自己同型群 IA_n の群の表示は現在でも知られていない．しかしながら、Magnus [8] によって IA_n は、 $1 \leq i, j, k \leq n$ に対して、

$$\begin{aligned} K_{ij} : x_i &\mapsto x_j^{-1} x_i x_j, & x_m &\mapsto x_m \quad (m \neq i), \\ K_{ijk} : x_i &\mapsto x_i x_j x_k x_j^{-1} x_k^{-1}, & x_m &\mapsto x_m \quad (m \neq i), \end{aligned}$$

なる形の F_n の自己同型で生成される有限生成群であることが知られている．ここで、 $i \neq j, k$ かつ $j < k$ である．これらの生成元の間関係式の情報を得るための 1 つの手がかりとして以下のようなことを考えた．

各整数 $d \geq 2$ に対して F_n の verbal subgroup V_i^d , ($i \geq 0$) の族を帰納的に次のように定める．

$$V_0^d = F_n, \quad V_i^d = V_{i-1}^d(X^d, XYX^{-1}Y^{-1}).$$

このとき、各 V_i^d のアーベル化 $\overline{V_i^d}$ に $\text{Aut } F_n$ を作用させることにより、 $\text{Aut } F_n$ の線型表現 $\rho_i^d : \text{Aut } F_n \rightarrow \text{Aut } \overline{V_i^d}$ の族が得られる。 $\ker(\rho_i^d)$ の核を K_i^d と置く。直ぐ分かるように、 $K_0^d = IA_n$ である。このとき、次のような結果が得られた。

定理 5 $n \geq 1, d \geq 2$ に対して、

$$(1) \quad IA_n = K_0^d \supset K_1^d \supset K_2^d \supset \dots,$$

$$(2) \quad \bigcap_{i \geq 0} K_i^d = \{1\},$$

が成り立つ。

$d = 2$ の場合については、Grossman [4] によって考察されており、この結果はそれの一般化である。現在は、組み合わせ群論や表現論などを用いて線型表現 ρ_i^d たちの性質を解析すること、及び、得られたフィルトレーションの共通部分が自明であるということから、 IA_n の生成元たちの間の関係式について何らかの情報が得られないかということに興味を持っている。

5 謝辞

修士論文を書くにあたり、河澄響矢先生、森田茂之先生には数々の有益な助言と暖かい励ましを頂いた。この場を借りて心から感謝の意を表する。

References

- [1] J. S. Birman; Braids, Links, and Mapping Class Groups, Ann. of Math. Stud. 82, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.
- [2] H. Frasch; Die Erzeugenden der Hauptkongruenzgruppen für Primzahlstufen, Math. Ann. 108 (1933), 230-252.
- [3] S. M. Gersten; A presentation for the special automorphism group of a free group, J. Pure and Applied Algebra 33 (1984), 269-279.
- [4] E. K. Grossman; Representations of the Automorphism Groups of Free Groups, J. of Algebra 30 (1974), 388-399.
- [5] A. Hatcher and K. Vogtmann; Rational homology of $\text{Aut}(F_n)$, Math. Res. Lett. 5(1998), no. 6, 759-780.

- [6] N. Kawazumi; Cohomological Aspects of Magnus Expansions, in preparation.
- [7] R. Lee and R. H. Szczarba; On the homology and cohomology of congruence subgroups, *Invent. Math.* 33 (1976), 31-60.
- [8] W. Magnus; Über n -dimensionale Gittertransformationen, *Acta Math.* 64 (1935), 353-367.
- [9] K. Matsuzaki; On the cohomology groups of $SL(2, \mathbf{Z})$ with coefficients in $H_1(T^2; \mathbf{Z})^{\otimes m}$, master thesis, University of Tokyo, 2001.
- [10] S. Morita; Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles I, *Ann. Inst. Fourier* 39 (1989), 777-810.
- [11] S. Morita; Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, *Duke Math. J.* 70 (1993), 699-726.
- [12] J. Nielsen; Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, *Math. Ann.* 78 (1918), 385-397.
- [13] J. Nielsen; Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, *Acta. Math.* 50 (1927), 189-358.

Takao Satoh

Graduate School of
 Mathematical Sciences,
 The University of Tokyo,
 3-8-1 Komaba, Meguro-ku,
 Tokyo, 153-8914, Japan
 E-mail: takao@ms.u-tokyo.ac.jp

RESEARCH OF SPATIAL GRAPHS IN TERMS OF KNOT THEORY

REIKO SHINJO
SCHOOL OF EDUCATION, WASEDA UNIVERSITY
(RESEARCH ASSOCIATE)

We work in the piecewise linear category. Let G be a finite graph. We consider G as a topological space in the usual way.

An embedding $f : G \rightarrow S^3$ of G into the 3-sphere S^3 is called a *spatial embedding* of G or simply a *spatial graph*. A *cycle* of G is a subgraph of G which is homeomorphic to the 1-sphere S^1 . If the graph G is a cycle then f is called a *knot* and if G is a disjoint union of n cycles then f is called an *n -component link*. If G contains a cycle γ then $f|_{\gamma}$ can be regarded as a knot in the spatial embedding f . Therefore spatial graphs are regarded as an extension of knots or links. And there are various resarches about spatial graphs in terms of knot theory with considering knots or links contained in spatial graphs.

We consider classification of spatial embeddings under a certain equivalence relation by investigating knots in the spatial embeddings. For example we consider Seifert surfaces of knots in a spatial graph with mutually disjoint interiors. On the subject we have had some results.

Besides we would like to define a trivial spatial embedding. For planar graphs, triviality has been defined already. Let G be a planar graph. We say that an embedding $f : G \rightarrow S^3$ is *trivial* if there exists an embedding $g : G \rightarrow S^2 \subset S^3$ which is ambient isotopic to f . However for not all graphs, a trivial spatial embedding has been defined yet. And there are some attempt to define a trivial spatial embedding.

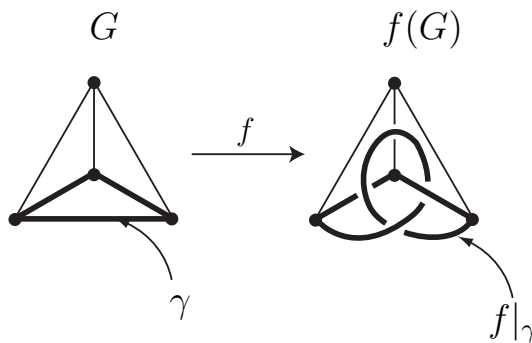


FIGURE 1. a spatial embedding

E-mail address: reiko@suou.waseda.jp

Date: August, 2004.

フォックスの結び目理論入門

杉村真之助 (大阪市立大学大学院理学研究科 M1)

クロウエル、フォックスの結び目理論入門という本を使って勉強しています。まずは、結び目の上方表示を定義し、そのあとにフォックスの微分を定義して、それを用いてアレキサンダー行列を作って初等イデアルを求めるということをしました。そして現在は、初等イデアルからアレキサンダー多項式を求めるということを具体的に計算をしているところです。

Descriptions on surfaces in four-space,1

Normal form

高橋祐貴 (神戸大学大学院理学研究科 M1)

四次元内の surface で、次をみたすものを surface in Normal form という。

K : surface in 4-space

$K \cap R^3[2]$: trivial link

$K \cap R^3[1]$: knot

$K \cap R^3[0]$: link

$K \cap R^3[-1]$: knot

$K \cap R^3[-2]$: trivial link

四次元内の任意の locally flat, connected, closed, oriented surface と ambient isotopic となる surface in Normal form が存在する。

超楕円曲線の周期

田所 勇樹

(東京大学大学院数理科学研究科)

概要

コンパクト Riemann 面 X の周期は、 X の複素構造を考えるうえで、重要な道具である。どのコンパクト Riemann 面でも、周期を計算するのは容易とは言えない。特別な形の超楕円曲線の周期は求められているが、ここではその一つを紹介することしよう。[3] の定理 2 の直接的証明を行う。

1 序

まずは、種数 $g \in \mathbb{Z}_{>0}$ のコンパクト Riemann 面 X の周期を紹介し、その主な性質を [1] に基づいて簡単に紹介する。 X の 1 次元ホモロジー群 $H_1 := H_1(X; \mathbb{Z})$ のシンプクレクティク基底 $\{[a_i], [b_i]\}_{i=1,2,\dots,g} \subset H_1$ を一つとる。つまり、 $(,) : H_1 \times H_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ を交点数とすると、 $([a_i], [b_j]) = \delta_{i,j} = -([b_j], [a_i])$, $([a_i], [a_j]) = ([b_i], [b_j]) = 0$ が成立する。ただし、 $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタを表す。図 1 参照。 K_X を X の canonical divisor とし、 $H^0(X; K_X)$ は X 上の正則 1-形式全体からなる \mathbb{C} 上のベクトル空間を表すものとする。 $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X; K_X) = g$ であることが知られているので、 $\{\omega_i\}_{i=1,2,\dots,g} \subset H^0(X; K_X)$ を $H^0(X; K_X)$ の基底とする。 ω_i が閉 1-形式なので、

$$A_{ij} := \int_{a_j} \omega_i, \quad B_{ij} := \int_{b_j} \omega_i$$

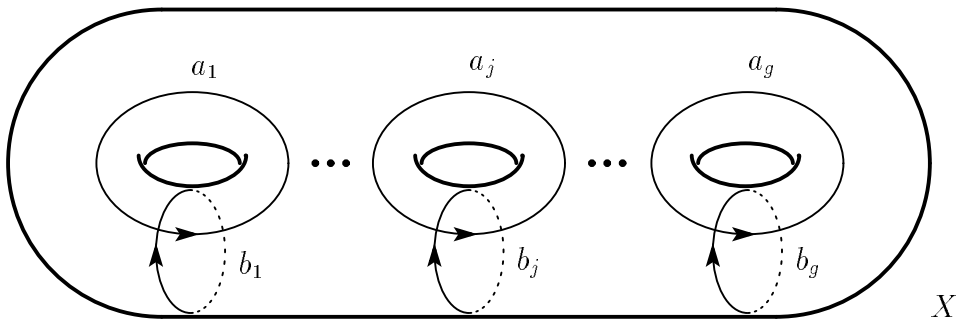


図 1: シンプクレクティク基底の例

を定義できる. これらは, a_j, b_j のホモロジー類のみに依存する. A_{ij}, B_{ij} を成分とする, g 行 g 列の行列をそれぞれ A, B とおく.

補題 1.1. A は逆行列を持つ.

よって, 周期が定義できる.

定義 1.2. 周期行列 Z を $A^{-1}B$ と定める.

Z はシンプレクティック基底 $\{[a_i], [b_i]\}_{i=1,2,\dots,g} \subset H_1$ の取り方に依存してしまう. また, 以下の性質が知られている.

定理 1.3. 周期行列 Z は対称であり, かつ, その虚部は正值である.

2 超楕円曲線

2.1 超楕円曲線の定義

超楕円曲線 C は次式で表される代数曲線のコンパクト化で定義する.

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = z^{2g+2} - 1\}.$$

正確に言うと C は, 以下のような 2 枚の曲線 C_0, C_∞ の貼り合わせである.

$$\begin{aligned} C_0 &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = z^{2g+2} - 1\} \\ C_\infty &= \{(u, v) \in \mathbb{C}^2; v^2 = 1 - u^{2g+2}\} \end{aligned}$$

とすると,

$$C = C_0 \cup_\varphi C_\infty.$$

ただし,

$$\varphi: C_0 \setminus \{z = 0 \text{ 部分}\} \ni (z, w) \mapsto \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z^{g+1}}\right) = (u, v) \in C_\infty \setminus \{u = 0 \text{ 部分}\}.$$

以上より, C 上の点は, $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ だとみなすことにする. C を $\mathbb{C}P^1$ の 2 重分岐被覆とみよう. ζ を 1 の $(2g+2)$ 乗根 $\exp(2\pi\sqrt{-1}/(2g+2))$ とし, $p_i = \zeta^i \in \mathbb{C}P^1$, $i = 0, 1, \dots, 2g+1$ とする. $P_i = (\zeta^i, 0) \in C$ とし, 正則射影を

$$\pi: C \ni (z, w) \mapsto z \in \mathbb{C}P^1$$

とすると, $\pi(P_i) = p_i$ が成立して, π が $\{p_i\}_{i=0,1,\dots,2g+1}$ を分岐点とする 2 重分岐被覆となる. また, 超楕円対合として, C 上の正則同型

$$\iota: C \ni (z, w) \mapsto (z, -w) \in C$$

がとれる.

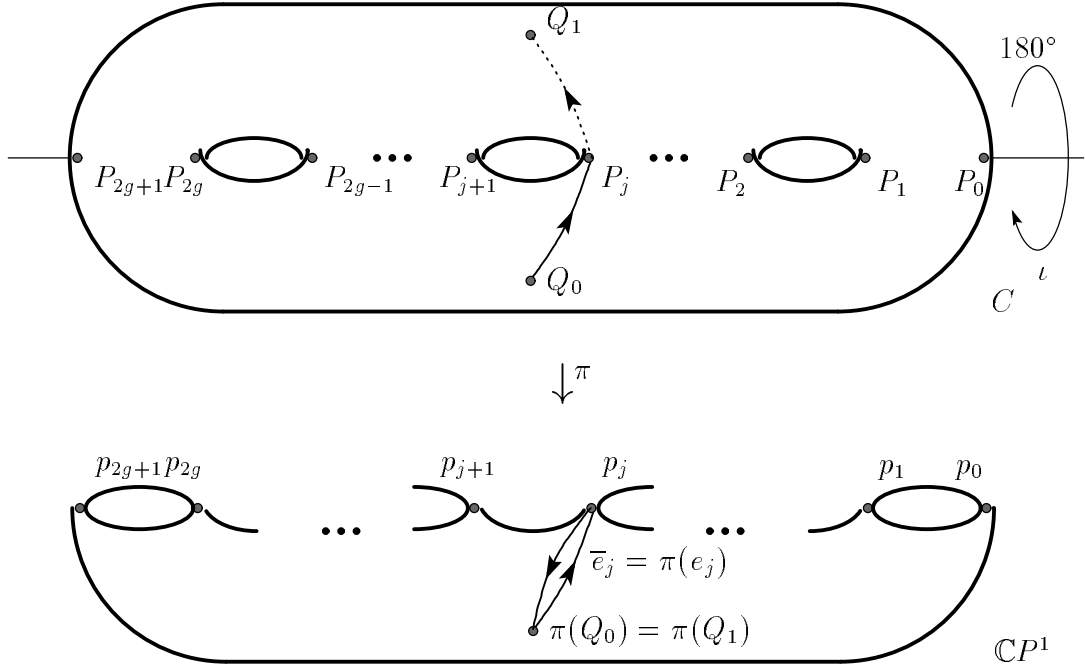


図 2: $\pi: C \rightarrow \mathbb{C}P^1$

2.2 $H_1(C; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底

C 上の 1 次元ホモロジー群 $H_1(C; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を求めよう. C 上の 2 点, $Q_0 = (0, \sqrt{-1}), Q_1 = (0, \sqrt{-1}) (= \iota(Q_0))$ をとる. 図 2 参照. C 上の道 $e_j: [0, 1] \rightarrow C, j = 0, 1, \dots, 2g + 1$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} (2t\zeta^j, \sqrt{-1}\sqrt{1-(2t)^{2g+2}}) & \text{for } 0 \leq t \leq 1/2, \\ ((2-2t)\zeta^j, -\sqrt{-1}\sqrt{1-(2-2t)^{2g+2}}) & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は C 上の Q_0 を基点とするループであることがわかる. ただし, $e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は, e_{j_1} を先に通る, その後 $\iota(e_{j_2})$ を通る道を表すものとする.

基点 Q_0 を固定したホモトピー同値関係

$$e_j \cdot \iota(e_j) \sim 1, \quad j = 0, 1, \dots, 2g + 1,$$

と

$$e_0 \cdot \iota(e_1) \cdots e_{2g} \cdot \iota(e_{2g+1}) \sim 1.$$

を得る. Q_0 を基点とする C 上のループ $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, g$ を

$$\begin{aligned} a_i &= e_{2i-1} \cdot \iota(e_{2i}), \\ b_i &= e_{2i-1} \cdot \iota(e_{2i-2}) \cdots e_1 \cdot \iota(e_0). \end{aligned}$$

と定める. 図をていねいに描いていくと, 次がわかる.

補題 2.1. $\{[a_i], [b_i]\}_{i=1,2,\dots,g}$ は, $H_1(C; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底である.

2.3 C 上の正則 1-形式

C 上の 1 形式を $\omega_i = z^{i-1} dz/w, i = 1, 2, \dots, g$ と定める. ω_i は, C 上で正則であることがわかる. 以下の事実が知られている. たとえば, [2](190-191) を参照せよ.

命題 2.2. $\{\omega_i\}_{i=1,2,\dots,g}$ は, \mathbb{C} ベクトル空間 $H^0(C; K_C)$ の基底になる.

$B(u, v)$ をベータ関数 $\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx$ ($u, v > 0$) とする.

補題 2.3.

$$\int_{e_j} \omega_i = -2\sqrt{-1}\zeta^{ij} B(i/(2g+2), 1/2)/(2g+2) = - \int_{i(e_j)} \omega_i.$$

証明. $\{(r\zeta^j, \sqrt{-1}\sqrt{1-r^{2g+2}}); 0 \leq r \leq 1\}$ において, ω_i は

$$\frac{r^{i-1}\zeta^{j(i-1)}}{\sqrt{-1}\sqrt{1-r^{2g+2}}}\zeta^j dr$$

と表される. これを ξ_i と表す. ξ_i は, CP^1 上の 1-形式である.

$$\begin{aligned} \int_{e_j} \omega_i &= \int_0^1 \xi_i + \int_1^0 (-\xi_i) \\ &= -2\sqrt{-1}\zeta^{ij} \int_0^1 \frac{r^{i-1}}{\sqrt{1-r^{2g+2}}} dr \\ &= -2\sqrt{-1}\zeta^{ij} \int_0^1 r^{i-1}(1-r^{2g+2})^{1/2-1} dr \\ &= -2\sqrt{-1}\zeta^{ij} \int_0^1 t^{(i-1)/(2g+2)}(1-t)^{1/2-1} \frac{1}{2g+2} t^{1/(2g+2)-1} dt \\ &= -2\sqrt{-1}\zeta^{ij}/(2g+2) \int_0^1 t^{i/(2g+2)-1}(1-t)^{1/2-1} dt \\ &= -2\sqrt{-1}\zeta^{ij}/(2g+2) B(i/(2g+2), 1/2). \end{aligned}$$

□

ω'_i として, 正則 1-形式

$$\frac{(2g+2)\sqrt{-1}}{2B(i/(2g+2), 1/2)} \omega_i$$

と表すものとする. 補題 2.3 を用いて, ω'_i の a_j, b_j に沿った積分がわかる.

補題 2.4.

$$\int_{a_j} \omega'_i = \zeta^{i(2j-1)}(1 - \zeta^i),$$

$$\int_{b_j} \omega'_i = \frac{\zeta^{2ij} - 1}{\zeta^i + 1},$$

ただし, $i, j \in \{1, 2, \dots, g\}$.

A, B を以下の行列とする

$$\begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega'_1 & \cdots & \int_{a_g} \omega'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1} \omega'_g & \cdots & \int_{a_g} \omega'_g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \int_{b_1} \omega'_1 & \cdots & \int_{b_g} \omega'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_1} \omega'_g & \cdots & \int_{b_g} \omega'_g \end{pmatrix}.$$

周期行列を得るためには, A^{-1} を計算する必要がある. これは容易に得られる.

補題 2.5. A^{-1} の (ij) -成分は以下で与えられる.

$$\frac{1}{g+1} \frac{\zeta^j(-1 + \zeta^{-2ij})}{1 - \zeta^j}.$$

証明.

$$\sum_{k=1}^g \frac{1}{g+1} \frac{\zeta^k(-1 + \zeta^{-2ik})}{1 - \zeta^k} \zeta^{k(2j-1)}(1 - \zeta^k) = \delta_{i,j}$$

を示せば良い.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^g \frac{1}{g+1} \frac{\zeta^k(-1 + \zeta^{-2ik})}{1 - \zeta^k} \zeta^{k(2j-1)}(1 - \zeta^k) &= \frac{1}{g+1} \sum_{k=1}^g \zeta^{2kj}(-1 + \zeta^{-2ik}) \\ &= \frac{1}{g+1} \sum_{k=1}^g \left\{ -(\zeta^{2j})^k + (\zeta^{2j-2i})^k \right\} \end{aligned}$$

(i) $i = j$ のとき.

$$\begin{aligned} \frac{1}{g+1} \sum_{k=1}^g \left\{ -(\zeta^{2j})^k + 1 \right\} &= \frac{1}{g+1} \left\{ -\frac{\zeta^{2j} - (\zeta^{2j})^{g+1}}{1 - \zeta^{2j}} + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{g+1} \left\{ -\frac{\zeta^{2j} - 1}{1 - \zeta^{2j}} + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{g+1}(g+1) = 1 \end{aligned}$$

となる.

(ii) $i \neq j$ のとき.

$$\begin{aligned} \frac{1}{g+1} \sum_{k=1}^g \left\{ -(\zeta^{2j})^k + (\zeta^{2j-2i})^k \right\} &= \frac{1}{g+1} \left\{ -\frac{\zeta^{2j} - (\zeta^{2j})^{g+1}}{1 - \zeta^{2j}} + \frac{\zeta^{2j-2i} - (\zeta^{2j-2i})^{g+1}}{1 - \zeta^{2j-2i}} \right\} \\ &= \frac{1}{g+1} \left\{ -\frac{\zeta^{2j} - 1}{1 - \zeta^{2j}} + \frac{\zeta^{2j-2i} - 1}{1 - \zeta^{2j-2i}} \right\} \\ &= \frac{1}{g+1} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

となる.

□

$A^{-1}B$ の成分を表示すると, 以下の周期行列を得る.

定理 2.6. $Z = A^{-1}B$ を C の周期行列とする. その (ij) -成分は

$$\frac{1}{g+1} \sum_{k=1}^g \frac{\zeta^k (\zeta^{-2ik} - 1)(\zeta^{2kj} - 1)}{1 - \zeta^{2k}}$$

で与えられる. さらに, すべての成分は, 純虚数である.

定理 2.7. (Schindler[3], Theorem 2)

上記の条件のもとで, C の周期行列の (ij) -成分は

$$\frac{1}{g+1} \sum_{\nu=1}^i \left(\frac{1 + \cos \frac{2\nu-1}{g+1} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{g+1} \pi} + \frac{1 + \cos \frac{2(j-\nu)-1}{g+1} \pi}{\sin \frac{2(j-\nu)-1}{g+1} \pi} \right) \sqrt{-1}$$

で与えられる.

Schindler による表示とは, 一見すると異なるが, 以下のように計算すると, 一致することがわかる.

命題 2.8. Theorem 2.6 と 2.7 の表示は一致する.

証明.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^g \frac{\zeta^k (\zeta^{-2ik} - 1)(\zeta^{2kj} - 1)}{1 - \zeta^{2k}} &= \sum_{k=1}^g \zeta^k (\zeta^{2kj} - 1) \zeta^{-2k} \frac{1 - (\zeta^{-2k})^i}{1 - \zeta^{-2k}} \\ &= \sum_{k=1}^g \zeta^k (\zeta^{2kj} - 1) \sum_{\nu=1}^i \zeta^{-2k\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^i \sum_{k=1}^g \left((\zeta^{1-2\nu+2j})^k - (\zeta^{1-2\nu})^k \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^i \left(\frac{1 + \zeta^{1-2\nu+2j}}{1 - \zeta^{1-2\nu+2j}} - \frac{1 + \zeta^{1-2\nu}}{1 - \zeta^{1-2\nu}} \right). \end{aligned}$$

あとは,

$$\zeta^a = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2g+2}a\right) = \exp\left(\frac{a\pi\sqrt{-1}}{g+1}\right) = \cos\left(\frac{a\pi}{g+1}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{a\pi}{g+1}\right)$$

を用いて得られる,

$$\begin{aligned}\frac{1+\zeta^a}{1-\zeta^a} &= \frac{(1+\zeta^a)(1-\zeta^{-a})}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^{-a})} \\ &= \frac{\zeta^a - \zeta^{-a}}{2 - (\zeta^a + \zeta^{-a})} \\ &= \frac{2\sqrt{-1}\sin\frac{a\pi}{g+1}}{2 - 2\cos\frac{a\pi}{g+1}} \\ &= \frac{\sin\frac{a\pi}{g+1}}{1 - \cos\frac{a\pi}{g+1}}\sqrt{-1} \\ &= \frac{\sin\frac{a\pi}{g+1}(1 + \cos\frac{a\pi}{g+1})}{(1 - \cos\frac{a\pi}{g+1})(1 + \cos\frac{a\pi}{g+1})}\sqrt{-1} \\ &= \frac{1 + \cos\frac{a\pi}{g+1}}{\sin\frac{a\pi}{g+1}}\sqrt{-1}\end{aligned}$$

を用いれば良い.

□

参考文献

- [1] Narasimhan, Raghavan: *Compact Riemann surfaces*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [2] 小木曾啓示: 代数曲線論. 朝倉書店, 2002.
- [3] Schindler, Bernhard: *Period matrices of hyperelliptic curves*. Manuscripta Math. 78 (1993), no. 4, 369–380.

図式的観点による曲面結び目理論の研究

田中 心 (東京大学大学院数理科学研究科 D2)

1. これまでの研究]

曲面結び目理論について図式という観点から研究している。曲面結び目とは、4次元ユークリッド空間に局所平坦に埋め込まれた有向連結閉曲面の事であり、図式による曲面結び目の研究は、近年 Carter-Saito らによって発展してきている (cf. [2])。以下では、これまでに得られた二つの結果について述べる。曲面結び目の図式における三重点に関わる不変量として、最小三重点数というものがある。これは、同じ曲面結び目を表す図式の中で三重点の個数の最小値として定義されるものであり、さまざまな研究がなされている。例えば、「球面結び目に対しては、最小三重点数が0である事トリボン型であることは同値である」という Yajima による結果、「最小三重点数が1であるような曲面結び目は存在しない」という Satoh による結果、「任意の自然数 n に対して n より大きい最小三重点数を持つ曲面結び目が存在する」という Kamada による結果などが挙げられる。一般に、曲面結び目に対して最小三重点数を決定することは困難であったが、最近 Satoh-Shima ら [5] は、カンドルコサイクル不変量と呼ばれる曲面結び目不変量を用いて最小三重点数を下から評価し、2ツイストスパン三葉結び目の最小三重点数は4であることを示した。カンドルコサイクル不変量は、カンドルという代数系によるカラリング数をカンドルホモロジー理論によって精密化したものであり、Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito ら [1] によって定義された不変量である。この不変量は Carter-Elhamedadi-Grana-Saito らによってさらに一般化されている。最小三重点数が2又は3であるような曲面結び目の存在性については、Satoh によって「球面結び目ならば、最小三重点数が2や3のものは存在しない」ことが示されているが、種数が高い場合には今のところ分かっていない。論文 [6] では、一般化されたカンドルコサイクル不変量をホモロジー論的に解釈することで曲面結び目に対して generalized fundamental class というホモロジー類を定義し、三重点を二個又は三個持つ図式で表される曲面結び目に対して generalized fundamental class の取り得る値を分類した。これは、最小三重点数が2又は3であるような曲面結び目の存在性に対する一つのアプローチとして有効であると期待される。また、一般化されたホモロジー理論を使って綿密に調べた結果として、Satoh-Shima らの評価がより多くのカンドルに対して成立する事が分かった。一次元結び目理論と同様に、曲面結び目理論においてもブレイドの概念(曲面ブレイド)が Viro, Rudolph らによって定義さ

れており (cf. [3]), Viro, Kamada らによって「任意の曲面結び目は単純曲面ブレイドの閉包として表される」という事が示されている. 同じ曲面結び目を表す単純曲面ブレイドの中で, 曲面の枚数の最小値を曲面結び目のブレイド指数と呼ぶ. これに関して次のような研究がなされている. 例えば, 「ブレイド指数が 3 であるような曲面結び目はリボン型である」という特徴付けや, 「 $(2,n)$ トーラス結び目のスパン結び目のブレイド指数は 3 である」という結果が Kamada により得られている. また, Kamada-Satoh-Takabayashi ら [4] は, 連結和とブレイド指数の関係を明らかにし, それを用いてブレイド指数を上から評価することで, 「 $(2,n)$ トーラス結び目のスパン結び目を二つ連結和してできる球面結び目のブレイド指数は 4 である」ということを示した. この中で彼らは, 1 融合リボン球面結び目のアレキサンダー加群の性質を用いてブレイド指数を下から評価したが, この方法でより良い下からの評価を得る事は難しいと思われる. 論文 [7] では, 曲面ブレイドの分岐点が結び目カンドルの生成元の個数にどのように影響するかを明らかにすることで, 曲面結び目のブレイド指数をカンドルによるカラリング数によって下から評価する定理を得た. この定理は, 曲面結び目のブレイド指数と結び目カンドルの生成元の個数の関連性に注目した点と, 曲面の種数によらず適用できる点が有用である. さらに得られた評価を用いて, 「 $(2,n)$ トーラス結び目のスパン結び目を s 個連結和してできた球面結び目のブレイド指数は $s+2$ である」という結果を得た. また, この定理を種数が正であるような曲面結び目に適用し, 「 $(2,n)$ トーラス結び目のスパン結び目を s 個連結和してできた球面結び目に, 種数が正の自明な曲面結び目を連結和したもののブレイド指数は $s+2$ である」という系も得られた.

2. これからの目標

これまでの研究を踏まえて, 引き続き図式的な観点から曲面結び目を研究していく. 特に曲面結び目の図式における三重点に関わる性質を解明することを目標とする. 曲面結び目の図式における「三重点」は, 一次元の結び目の図式における「交点」に対応する概念と捉えることができ, 曲面結び目の複雑さを反映した対象だと言える. 三重点に関わる数量的な曲面結び目不変量として, 同じ曲面結び目を表す図式の三重点の個数の中で最小の数である「最小三重点数」や, 曲面結び目を 1 ハンドル手術により三重点のない図式を持つようにする際の 1 ハンドルの最小個数である「最小三重点解消数」等がある. 最小三重点数に関しては, 2 ツイストスパン三葉結び目の最小三重点数は 4 であることが Satoh-Shima らによって示されており, 最小三重点解消数に関しては, 結び目補空間の無限巡回被覆に関する torsion linking を用いて Kawauchi により研究されている. 最小三重点数が正である曲面結び目に関しては, 2 ツイストスパン三葉結び目の最小三重点数 4 が今のところ一番小さな例であり, また, 最小三重点数が 1 である曲面結び目は存在しない事が

Satoh により示されている. よって, 最小三重点数が 2 又は 3 であるような曲面結び目が存在するかどうかという問題は解決すべき基本的な問題であると思われる. これを解決することも大きな目標の一つである.

References

- [1] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003), no. 10, 3947-3989
- [2] J. S. Carter and M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, *Mathematical Surveys and Monographs* 55, Amer. Math. Soc., 1998.
- [3] S. Kamada, “ *Braid and Knot Theory in Dimension Four* ”, *Math. Surveys and Monographs* 95, Amer. Math. Soc., 2002.
- [4] S. Kamada, S. Satoh, and M. Takabayashi, The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots, preprint.
- [5] S. Satoh, A. Shima, The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four, *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 (2004), no. 3, 1007-1024.
- [6] K. Tanaka, On surface-links represented by diagrams with two or three triple points , preprint (2004).
- [7] K. Tanaka, The braid index of surface-knots and quandle colorings, preprint (2004)

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba
Meguro, Tokyo 153-8914, Japan
E-mail address: k-tanaka@ms.u-tokyo.ac.jp

グラフ理論・数学教育について

玉木 良

早稲田大学大学院教育学研究科
数学教育専攻幾何学研究指導M1

学部のゼミで「A FIRST LOOK AT GRAPH THEORY」John Clark・Derek Allan Holton 著を読み、グラフ理論の楽しさを知り、研究しようと思いました。そして、今年からは鈴木晋一先生が翻訳された「グラフ理論入門」の原著「PEARLS in GRAPH THEORY」Nora Hartsfield・Gerhard Ringel 著のセカンドバージョンの原著を読んでいます。

学部の頃は、グラフ理論も知らずにやり始めたのですが、やっていくうちに身近に感じる内容や美しい定理などを見て、ダンダンととりこになっていった。「A FIRST LOOK AT GRAPH THEORY」は、普通のグラフからダイグラフまであり、いろいろなグラフ理論を知ることができた。今読んでいる「PEARLS in GRAPH THEORY」は、まだ途中ではあるが、グラフの分解などの話も多く組合せ論的な内容でこれもまた楽しい。そして、この本は今年度中に全部読み、ゼミで発表できたらと思う。

そして、グラフ理論は高校の数学までとは違い、計算もほとんどない数学であり、パズルのような感じで楽しい分野だと思うので、高校や中学の数学に取り上げられないかと考えている。最近の学校では、選択する授業や総合学習という授業もあるのでチャンスはあるかと考えているので、高校生、中学生向けのグラフ理論の冊子を作りたいと思っています。また、ただ単にグラフ理論を紹介するのではなく、その冊子を読んだから論理的思考が強くなったとか、必要十分条件の強さを感じたりできるような物にしたいと考えている。例えば、オイラーグラフであるためには必要十分条件がある。だから、一筆書きができないものはできないと、できるものはできると言い切れることを理解させたいと思う。そして、こういった定理を自ら発見的に考え出す力を養いたいと思う。ただ教えるのではなく、学生たちが発見できるようなプロセスを考えていきたいと思っている。

そういう楽しい数学を発見したいと思い、トポロジー新人セミナーに参加しました。

Kirby calculus と微分構造

丹下基生

京都大学理学研究科数学教室

Email: tange@math.kyoto-u.ac.jp

2004 年 7 月 15 日

4次元多様体には微分構造を枠つき絡み目で表わす方法が存在する。それらはお互い絡まない自明結び目たちと、その補空間上の枠付け絡み目たちとして描くことができる。それらを1-ハンドル、2-ハンドルという。それを Kirby calculus という。そのとき

$$\begin{aligned} & \{1\text{-ハンドル}, 2\text{-ハンドル}\} / \{ \text{イソトピー}, \text{消去(生成)}, \text{スライディング} \} \\ & = \{ \text{閉じた4次元多様体の微分同相類} \} \end{aligned}$$

となる。ここで消去(生成)スライディングとは枠つき絡み目を動かすある操作である。この対応を眺めていても微分構造はわからないがいろいろな微分トポロジー不変量、Donaldson 不変量や Seiberg-Witten 不変量や Ozsvath-Szabo 不変量と共に用いると強力である。しかしこれらは Seiberg-Witten 不変量は同じでも微分同相でない例が知られており完全な不変量ではない。

それと一般の多様体に関してこれらを計算することは難しいので左辺から直接不変量を求めることができないか考えている。また求められるような多様体はどんな多様体かを考えている。

また4次元多様体へ2次元多様体の埋め込まれている場合についても考えている。上記の不変量には2次元埋め込みのための不変量が存在するが、それらと古典的な2次元埋め込み不変量との関係についても探ってみようと思っている。

自明なジョーンズ多項式をもつ非自明な仮想結び目について

辻 和典 (大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻 M2)

現在、私は仮想結び目理論 (virtual knot theory) について研究している。仮想結び目図式 (virtual knot diagram) とは、2次元空間に埋め込まれた向き付けられた円周で、各交点に正交点 (positive crossing)、負交点 (negative crossing) および仮想交点 (virtual crossing) のいずれかの情報を入れたものをいう。仮想結び目図式 (virtual knot diagram) に対してライデマイスター移動という7つの移動を許し、2つの仮想結び目図式 (virtual knot diagram) K 、 K' に対して、 K と K' が有限回のライデマイスター移動で移りあうとき、 K と K' は同値であるという。この同値類を仮想結び目 (virtual knot) という。仮想結び目理論 (virtual knot theory) についても、結び目理論 (knot theory) と同様にジョーンズ多項式と呼ばれる不変量が存在する。しかし、仮想結び目 (virtual knot) の中には自明なジョーンズ多項式をもつ非自明な仮想結び目 (virtual knot) が多数存在する。そのなかには、仮想交点 (virtual crossing) を3個含む次数2のブレイド型の仮想結び目 (virtual knot) で、各交点の符号の和が0になるようなものがある。現在はこの型の仮想結び目 (virtual knot) に焦点をあて研究を進めている。

様々な結び目における Dehn surgery について

辻川 圭治

(大阪市立大学大学院理学研究科 M2)

現在、勉強していることは主に Dehn surgery についてです。Dehn surgery とは、 S^3 内から互いに交わらない有限個のソリッドトーラスを取り除き、それらを境界での貼り合せ方を変えて埋め戻す操作です。これにより、境界での貼り合せ方によって S^3 とは違う色々な 3 次元多様体が出来ます。また、Dehn surgery によって 3 次元多様体の同相類を変えないような絡み目上の変形として Kirby-Rolfsen move というものがあります。この変形を様々な結び目に使い、その性質を勉強しています。

三次元多様体

土屋秀典

早稲田大学大学院教育学研究科
数学教育専攻トポロジー専修 M1

読んでいる教科書：3次元多様体入門 森元勘治先生 培風館

教科書の2章を読んでいるところで、多様体の基礎を学んでいます。

直感的に絵を描いて変形するのが好きなのですが、 n 次元多様体についてはそのような方法では考えることが非常に難しいのと、もっと理論的なことを強化するために現在勉強中です。

単体と複体から始まって、正則近傍、球面と球体に関する基本定理、 n 次元組み合わせ多様体などを PL トポロジーの領域で勉強しています。

まだまだ先の章の話なのですが、僕が今、最も興味を持っている題材について以下に書きます。

多様体はその分解においてさまざまな形を作ることができるので、非常に面白いです。

私は3次元多様体を専門で勉強していますが、そこでもヒーガード分解など、非常に面白い研究がなされています。

$$\begin{aligned} S^3 &= B^3 \cup B^3 \\ &= (B^2 \times S^1) \cup (B^2 \times S^1) \quad (B^2 \times S^1) \text{はソリッドトーラス(以下 } V \text{とおきます)} \\ &= (V \cup V) \cup (V \cup V) \\ &= (V \cup V \cup V) \cup (V \cup V \cup V) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

のように。各々は各々の境界で張り合わされています。

このような変形について簡単にお話させていただけたらと思っています。

目下の目標は、このような3次元多様体の変形を「見る」力を養うことなので、4次元のイメージをずる訓練もしています。

よく瞑想みたいな感じで(はたから見るとあやしいらしい)イメージの世界にトリップします。

指導教官に、「毎日3時間は瞑想しないとね」といわれたことがありますし。

Knot Theory

戸田一平 早稲田大学院教育学研究科数学教育専攻M1

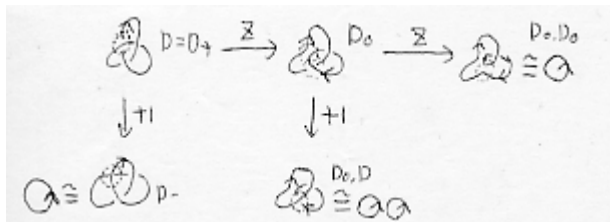
皆様はじめまして。 現在僕は村杉邦男先生の「結び目理論とその応用」を読んでいます。今は、Conway 多項式の所に興味をもって、その一例を述べてみたいと思います。

Knot には交点の上下が必ずあり、上下の交差を換えてしまうと同値でない knot になってしまうこともある。ここでは交点を色々いじれば trivial knot(または trivial link)と同値なものになり、そうなるまでの過程を調べてその交点をいじる回数によって多項式を導く。ある oriented knot の正則図形を D とし、 D のある交点の近傍以外ではまったく同一でその近傍内ですこし違っている。



また knot の交点の部分は D_+ または D_- のどちらかである。unknot や unlink を作るやり方は、「ある交点において D_+ は D_- または D_0 に換えてみる」というふうなことを繰り返す。そして、unknot(または unlink)が出てきた所で終了する。結局 D から変形するとき、すべての変形のルートに対して unknot(または unlink)が出てきた所で完全に終了する。ここで3つの Conway 多項式において $D_+(z) - D_-(z) = z D_0(z)$ という公式を使う。

<変形の手順>



$D = D_+$ から始めると、 $D(z) = D_+(z) = D_-(z) + z D_0(z)$ この図の変形に伴う数1と z は、それぞれ $D_-(z)$ と $D_0(z)$ の係数である。 $D = D_+$ から始めたそれぞれの変化の道筋に対し、 $D(z) = D_+(z) = 1 \cdot D_0(z) + z \cdot D_{00}(z) + z^2 \cdot D_{000}(z)$ この式の $D_0(z)$ と $D_{00}(z)$ はそれぞれ unknot の公理より $D_0(z) = 1$ 、2成分の unlink の Conway 多項式より $D_{00}(z) = 0$ となっている。

よって $D(z) = 1 \cdot 1 + z \cdot 0 + z^2 \cdot 1 = 1 + z^2$

以上より、この trefoil knot の Conway 多項式は $D(z) = 1 + z^2$ である。

(終了)

これが私が最近勉強して興味をもっている内容です。未だに右も左も分からないどころか3次元の方向に対して分からないことだらけです。今後ともお会いしたときはよろしくお願いします。

2004年8月吉日

kawauchi's second duality

東京大学大学院数理科学研究科 M2 富沢宗平

2004.7.16

1 はじめに

このアブストラクトでは、現在自分が扱っている kawauchi's second duality に関して簡単に書きたいと思います。

2 定理の概略

M を compact oriented topological n -manifold とする。 γ を $H^1(M)$ の element として、 \tilde{M} を M の γ に関する infinite cyclic covering とする。covering transformation を $\langle t \rangle$ であらわし、 (A, A') を ∂M の splitting とする。 $H_*(\tilde{M}, \tilde{A})$ は *finitely generated* Λ -module となる。ここで、 $e^i H = Ext_Z^i(H; Z)$, $tH = Z$ -torsion part of H , $bH = H/tH$ とする。 H が Λ -module のときは、 $E^i H = Ext_\Lambda^i(H; \Lambda)$, $TH = \Lambda$ -torsion part of H , $BH = H/TH$ とする。

$DH = \{x \in H \mid \exists \text{coprime } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Lambda (m \geq 2) \text{ with } \lambda_i x = 0, \forall i\}$ とする。 M を $p+s+2$ -manifold とすると、 $\theta : E^2 E^2 H_s(\tilde{M}, \tilde{A}') \rightarrow E^1 B H_{p+1}(\tilde{M}, \tilde{A})$ という写像があり、その kernel を $E^2 E^2 H_s(\tilde{M}, \tilde{A}')^\theta$ とあらわす。すると、次のような写像がある。

$$l : E^2 E^2 H_p(\tilde{M}, \tilde{A}')^\theta \times E^2 E^2 H_s(\tilde{M}, \tilde{A}')^\theta \rightarrow Q/Z$$

次を満たす。

- (1) *homotopy invariance*
- (2) *t-isometric*
- (3) $(-1)^{ps+1}$ -*symmetric*
- (4) *non-singular*

3 大まかな解説

Γ を単位元を持つ環とする。 $C = C_q, \partial$ を Γ -projective chain complex, F を Γ -module とする。 $h : H^*(C; F) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(H_*(C); F)$ を $h(f) = f(z)$ で定義する。 その kernel を $K^*(C; F)$ であらわす。 すると、

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K^q(C; F) \hookrightarrow H^q(C; F) \xrightarrow{h} \text{Hom}_\Gamma(H_q(C), F) \xrightarrow{\eta} \\ \text{Ext}_\Gamma^2(H_{q-1}(C), F) \xrightarrow{\Delta} K^{q+1}(C; F) \xrightarrow{\rho} \text{Ext}_\Gamma^1(H_q(C), F) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

という natural exact sequence が導かれる。

この ρ から $\theta : DH_\Gamma^{q+1}(\tilde{M}, \tilde{A}) \rightarrow E^1BH_q(\tilde{M}, \tilde{A}')$ が導かれる。

また、 $0 \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow Q/Z \rightarrow 0$ という short exact sequence から、 $\text{Hom}_Z(H_p(\tilde{M}, \tilde{A}), Q/Z)$ から $e^1H_p(\tilde{M}, \tilde{A})$ への surjection が導かれ、これが Q/Z へ値を取るための橋渡しになっている。

4 今後

2-knot において、補空間の無限巡回被覆の 1 次ホモロジーの有限位数部分群からの Linking form が得られた。これを twisted spun knot などについて具体的に計算し、元になった 1-knot の結び目群との関係を調べてみたいと思っている。

Kauffman bracket skein module とその周辺について

中西清孝 九州大学大学院数理学府修士2年

私は Kauffman Bracket Skein Module (以下 KBSM と略記) についての研究を行っている. KBSM とは, Przytycki によって定義された三次元多様体の位相不変量であり, 三次元多様体の中の枠付き絡み目で生成される自由 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 加群をスケイン関係式 (図 1), 枠関係式 (図 2) で割ったものである. Przytycki はスケイン理論によって三次元多様体の代数的不変量を構成したのである ([5]).

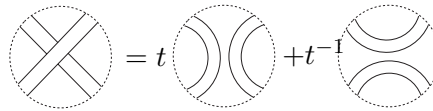


図 1: スケイン関係式

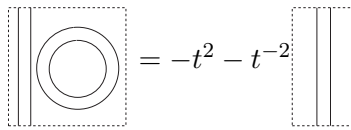


図 2: 枠関係式

次に, KBSM と他の位相不変量との関係を図式に表す. 以下三次元多様体 M の KBSM を $K_t(M)$, 厚み付けたトーラスを $T^2 \times I$ と表記し, S^3 内の結び目 K に対し, $\text{Int } N(K)$ をその開管状近傍としたとき, M を結び目 K の外部空間 $E(K) = S^3 \setminus \text{Int } N(K)$ として考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_t(T^2 \times I) & \xrightarrow{\Phi} & K_t(M) & \xrightarrow{\ker \Phi} & A\text{-ideal} & \xrightarrow{\text{直交関係式}} & \text{colored Jones 多項式} \\
 \downarrow t=-1 & & \downarrow t=-1 & & \downarrow \text{可換化} & & \\
 K_{-1}(T^2 \times I) & \xrightarrow{\phi} & K_{-1}(M) & \xrightarrow{\ker \phi} & A \text{ 多項式} & &
 \end{array}$$

これらの関係を Frohman-Gelca-LoFaro 理論という ([3]). ただし直交関係式とは, A -ideal の変数 t と colored Jones 多項式の変数 q についての関係式であり, Φ, ϕ はカラー近傍としての包含写像が導く準同型のことである. またここに現れている A 多項式及び colored Jones 多項式は, 結び目の位相不変量であり, Kashaev の体積予想と関係した重要な不変量である.

Frohman-Gelca-LoFaro 理論からわかるように, KBSM には多くの情報が含まれており, 体積予想の解決の点からも, 任意の三次元多様体に対して KBSM を求めることは非常に重要である. しかし, 現在 KBSM が決定されている多様体は, S^3 , 曲面上の I -束, レンズ空間 ([4]), $(2, 2p+1)$ -torus 結び目及び twist 結び目の外部空間だけである ([1], [2]). そこで, 私は「修士論文」において twist 結び目の一般化である 2 橋結び目 $S(2p+1, 2q)$ の外部空間 $E(2p+1, 2q)$ の $t = -1$ における KBSM の研究を行っている (但し $2p+1$ と $2q$ は互いに素). なおよく知られている事実として, $(2, 2p+1)$ -torus 結び目を除く 2 橋結び目は双曲結び目である. そして Frohman-Gelca-LoFaro 理論

からわかるように, $t = -1$ を代入した 2 橋結び目の KBSM から 2 橋結び目の A 多項式を求められる.

私は, 種数 2 のハンドル体の境界上の閉曲線で, そこに沿って 2-ハンドルを 1 つ貼りつけると 2 橋結び目の外部空間 $E(2p + 1, 2q)$ が得られるようなものを求めた. この閉曲線を *attaching slope* (図 3) と呼ぶ. 2 橋結び目のトンネル数は 1 なので, 2 橋結び目の外部空間は種数 2 のハンドル体と 1 つの 2-ハンドルに分解できる. この事実から, 私はハンドル体の Dehn twist を用いて *attaching slope* を求めるためのアルゴリズムを構成し, そのアルゴリズムから $E(2p + 1, 2q)$ の *attaching slope* を具体的に求めたのである.

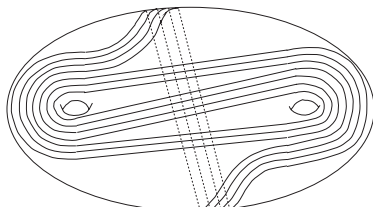


図 3: $E(7, 4)$ の *attaching slope*

現在, その *attaching slope* を有効に用いることにより 2 橋結び目の外部空間 $E(2p + 1, 2q)$ の KBSM を計算している. 以下, 一般の 2 橋結び目 $S(\alpha, \beta)$ の外部空間 $E(\alpha, \beta)$ の *attaching slope* からその KBSM を求める方法について述べる. Przytycki の補題 ([6]) によれば, 種数 2 のハンドル体に 2-ハンドルを貼りつけることにより, ハンドル体の KBSM に *sliding* と呼ばれる関係式が生じる. そこでまず, *attaching slope* と平行に走る枠付き結び目 $A(\alpha, \beta)$ を持ってくる. さらに, $A(\alpha, \beta)$ とハンドル体の KBSM の基底 L とバンド和を取ることで新しい枠付き結び目 $A_L(\alpha, \beta)$ を作る. 最後に, 2 つの枠付き絡み目 $A(\alpha, \beta)$ と $A_L(\alpha, \beta)$ をスケイン関係式を使い, ハンドル体の KBSM の基底で書き表す. そして, 求める関係式は $A(\alpha, \beta) = (\text{自明な枠付き結び目})$, $A_L(\alpha, \beta) = L$ として得られる. この手法は非常に応用しやすく, 特にトンネル数 1 の結び目の外部空間に対して有効であると考えられる.

参考文献

- [1] D. Bullock, *The $(2, \infty)$ -skein module of the complement of a $(2, 2p+1)$ torus knot*, J. Knot Theory and Its Ramification. **4** no.4 (1995) 619–632.
- [2] D. Bullock and W. Lo Faro, *The Kauffman bracket skein module of a twist knot exterior*, preprint, (2004) math. QA/0402102.
- [3] C. Frohman, R. Gelca, W. Lo Faro, *The A -polynomial fram the noncommutative viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc **354**, (2002), no.2, 735–747.
- [4] J. Hoste and J. H. Przytycki, *The $(2, \infty)$ -skein module of lens space; a generalization of the Jones polynomial*, J. Knot Theory and Its Ramification. **2** no.3 (1993) 321–333.
- [5] J. H. Przytycki, *Skein modules of 3-manifolds*, Bull. Pol. Acad. Sci. **39** (1–2) (1991) 91–100.

- [6] J. H. Przytycki, *Fundamental of Kauffman bracket skein module* , preprint, (1998) math. GT/9809113.

研究・勉強の紹介

野沢 啓 (東大数理 M1)

2004年7月29日

1 興味について

私は C^∞ -manifold の C^∞ -manifold への C^∞ -embedding の空間に興味があります。classical knot theory は $S^1 \rightarrow S^3$ C^∞ -embedding の isotopy class (連続の category で、この場合は C^∞ -isotopy class に等しい。) の分類理論であり、 S^1 と S^3 を取り替えたときにも同様の分類理論を考えたいと思っています。例えば田村一郎 [1] によると、次のように C^∞ -embedding の localness、globalness を定義すると global な C^∞ -embedding が存在します。

Def 1. $M, N : C^\infty$ -manifolds, $m = \dim M$, $f : M \rightarrow N$ C^∞ -embedding とする。

$\exists g : D^m \rightarrow N$ C^∞ -埋め込み s.t. $f(M) \subset g(D^m)$ のとき、 f は local であるという。

f が local でないとき、global であるという。

このような状況がいつ起こるのか調べたいと思っています。また、symplectic geometry では、 C^∞ -embedding に条件を加えたものとして symplectic embedding を考えますが、そこでは次の non squeezing theorem という定理が成立することが Gromov によって示されました。

Th 1. $B^{2n}(r) : 2n$ -ball with radius r , $Z^{2n}(R) = B^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ とする。

$\exists f : B^{2n}(r) \rightarrow Z^{2n}(R)$ symplectic embedding ならば、 $r \leq R$

どのような2つの symplectic manifold の間で symplectic embedding が存在するまたは存在しないのかということを考えてみたいと思っています。

2 セミナーについて

私は坪井俊教授の下でセミナーをさせて頂いています。2004年前期は Haefliger の S^{4k-1} の S^{6k} への embedding の C^∞ -isotopy class 全体から \mathbb{Z} への群としての同型を構成する論文を読みました。(但し、 $k > 1$ のとき。 $k = 1$ なら \mathbb{Z} への全射が同様に構成できる。) よく知られているように S^n の S^m への C^∞ -embedding の isotopy class は $n + 3 \leq m$ のとき自明になるのであるが (ref.[2][3])、 C^∞ の category ではそれは成り立たないという興味深い結果である。

3 参考文献

- [1] Haefliger, André. *Knotted $(4k - 1)$ -spheres in $6k$ -space*. Ann. of Math. (2) 75 1962 452–466.
- [2] Zeeman, E. C. *Unknotting combinatorial balls*. Ann. of Math. (2) 78 1963 501–526.
- [3] Stallings, John. *On topologically unknotted spheres*. Ann. of Math. (2) 77 1963 490–503.

Hyperbolic Scissors Congruences and Hyperbolic Volume

東京大学大学院数理科学研究科修士課程 2 年

畑田英和

概要

私は修士 1 年のとき、セミナーで Johan L. Dupont, Scissors Congruences, Group Homology and Characteristic Classes という本を読みました。Scissors Congruence とは n 次元空間 (E^n, S^n, \mathbb{H}^n) のどれかにおける”多面体”の同値関係で、二つの”多面体”が scissors congruence とは、二つの”多面体”を有限個の同じ個数の”多面体”のピースに分割して、合同な”多面体”のピース同士の一対一の対応がつけられることをいう。そこで、このことを代数的対象としてみるために、{”多面体”} を基底とする free abel group を scissors congruence から生成される関係式でわった加群 scissors congruence group $\mathcal{P}(X)$ を考える。ここで、 $X = X^n = E^n, S^n, \mathbb{H}^n$ である。Dupont はこの三つの 3-dim 空間のおおのについて、その scissors congruence group を考えて、完全系列を得ている。さらに、各完全系列に含まれる準同型写像の一つは、各空間の”多面体”の体積を導く関数が現れている。特に、双曲空間 \mathbb{H}^3 においてこのことについて見てみたい。

1. Scissors Congruence Group

まず、はじめに scissors congruence という同値関係、scissors congruence group を定義する。

$n \geq 1$ とし、 $X = X^n = E^n, S^n, \mathbb{H}^n$ のいずれかとする。また、 X の isometry group を $I(X)$ で表すことにする。測地的 n 単体 (geodesic n -simplex) Δ とは、 X に一般的な位置にある $n+1$ 個の点 a_0, \dots, a_n で張られる測地的凸包 $\Delta = |(a_0, \dots, a_n)|$ のことである。ただし、 $X = S^n$ のときは、 $n+1$ 個の点が一般的な位置にあるという条件に、 $n+1$ 個の点はすべてある開半球上にあるという条件を加える。また、点 a_0, \dots, a_n を Δ の頂点とよぶ。 X の polytope $P \subset X$ とは、以下の条件を満たす有限個の測地的 n 単体 $\{\Delta_i\}_{i=0}^k$ の和集合 $P = \bigcup_{i=0}^k \Delta_i$ のことである。

$i \neq j$ のとき、 $\Delta_i \cap \Delta_j$ は次元が $n-1$ 以下の全測地的な X の部分多様体である。

また、polytope P, P_1, P_2 が $P = P_1 \cup P_2$ を満たし、 $P_1 \cap P_2$ が内点を持たないとき、 P は P_1 と P_2 に分割するといひ、 $P = P_1 \amalg P_2$ とかく。

Def 1.1

$G \subset I(X); \text{subgp}$ とする。二つの polytope P, P' が G -scissors congruent であるとは、ある P, P' の同じ個数の有限個の分割 $P = \amalg_{i=0}^k P_i, P' = \amalg_{i=0}^k P'_i$ が存在して、各 i について、ある $g_i \in G$ が存在して、 $P_i = g_i P'_i$ となることをいう。

Def 1.2

$G \subset I(X); \text{subgp}$ とする。scissors congruence group $\mathcal{P}(X, G)$ を、 $\{ [P] \mid P \subset X; \text{polytope} \}$ を自由基底とする free abel group で、 G -scissors congruence から生成される関係式

$$\begin{aligned} 1) [P] - [P'] - [P''] \quad (P = P' \amalg P'') \\ 2) [gP] - [P] \quad (g \in G) \end{aligned}$$

を法とした加群である。特に、 $G = I(X)$ のとき、 $\mathcal{P}(X, G)$ を $\mathcal{P}(X)$ とかくことにする。

ここで、abstract で述べた Dupont の結果について述べておく。

Thm 1.3

次の、abel group の完全系列が存在する。

a)

$$0 \rightarrow H_2(SO(3), \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(E^3)/\mathcal{Z}(E^3) \xrightarrow{D} \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow H_1(SO(3), \mathbb{R}^3) \rightarrow 0$$

b)

$$0 \rightarrow H_3(SL(2, \mathbb{C}))^- \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(\mathbb{H}^3) \xrightarrow{D} \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow H_2(SL(2, \mathbb{C}))^- \rightarrow 0$$

c)

$$0 \rightarrow H_3(SU(2)) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(S^3)/\mathbb{Z} \xrightarrow{D} \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow H_2(SU(2)) \rightarrow 0$$

ここで, a) における $Z(E^3)$ は, 多角形と線分の積であるプリズム全体で生成される $\mathcal{P}(E^3)$ の subgroup である. b) における \sim は複素共役から誘導される involution に関する (-1) -固有空間である. c) における $\mathbb{Z} \subset \mathcal{P}(S^3)$ は $[S^3]$ で生成される $\mathcal{P}(S^3)$ の subgroup である. (この完全系列の証明などについては [Dupont] を参照してください)

また, 上の完全系列にでてきている D は Dehn invariant と呼ばれ, polytope の入力に対して, 体積 $+ \alpha$ (具体的には, 面角についての情報) という数値を出力するという不変量である. 特に 3次元双曲空間については [Milnor] にやさしく書いてあるので, 紹介したいと思う.

2. Volume and The Dehn invariant in hyperbolic 3-space

まず, dilogarithm function $L_2(z)$ を定義しておこう.

$$L_2(z) = - \int_0^z \log(1-w) \frac{dw}{w} \quad (z \in \mathbb{C} - [1, \infty))$$

3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 のモデルとして, 上半平面モデルを採用し, 境界 $\partial\mathbb{H}^3$ は Riemannian surface $\mathbb{C} \cup \infty$ と同一視する. totally asymptotic 3-simplex Δ を考える. すなわち, 頂点 a, b, c, d が $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \infty$ 上にあるような Δ を考える.

Prop 2.1

Δ は up to orientation preserving isometry で cross ratio

$$z = (a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

により, unique に定まる.

[pf]

$\partial\mathbb{H}^3$ には $SL(2; \mathbb{C})$ の元 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ が一次分数変換で作用している. つまり, $x \in \mathbb{C} \cup \infty$ に対して,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

と作用していて, この作用は \mathbb{H}^3 に isometric に拡張できる. これにより,

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \infty \\ b &\rightarrow 0 \\ c &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

という変換を誘導する $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ が一意に求め, d に対して,

$$z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot d = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

がとなればよい. まず, A を求める. 連立方程式を立てると,

$$\frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta} = \infty, \quad \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta} = 0, \quad \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta} = 1$$

となり、つまり、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \gamma a + \delta = 0 \\ \alpha b + \beta = 0 \\ (\alpha - \gamma)c + \beta - \delta = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \delta = -\gamma a \\ \beta = -\alpha b \\ (\alpha - \gamma)c + \beta - \delta = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \delta = -\gamma a \\ \beta = -\alpha b \\ (\alpha - \gamma)c - \alpha b + \gamma a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \delta = -\gamma a \\ \beta = -\alpha b \\ (c - b)\alpha = (c - a)\gamma \end{cases} \end{aligned}$$

となるが、一方で、 $A \in SL(2; \mathbb{C})$ から、

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

より、

$$-a\alpha\gamma + b\alpha\gamma = 1 \iff \alpha\gamma = \frac{1}{b-a}$$

となり、三頂点の変換から与えられる $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の関係式より、この式に $(c-a)$ をかけて、

$$\begin{aligned} (c-a)\alpha\gamma = \frac{c-a}{b-a} &\iff (c-b)\alpha^2 = \frac{c-a}{b-a} \\ &\iff \alpha = \sqrt{\frac{c-a}{(c-b)(b-a)}} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c-a}{(c-b)(b-a)}} & -b\sqrt{\frac{c-a}{(c-b)(b-a)}} \\ \sqrt{\frac{c-b}{(c-a)(b-a)}} & -a\sqrt{\frac{c-b}{(c-a)(b-a)}} \end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{aligned} A \cdot d &= \frac{\alpha d + \beta}{\gamma d + \delta} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{c-a}{(c-b)(b-a)}}d - b\sqrt{\frac{c-a}{(c-b)(b-a)}}}{\sqrt{\frac{c-b}{(c-a)(b-a)}}d - a\sqrt{\frac{c-b}{(c-a)(b-a)}}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{c-a}{(c-b)(b-a)}}(d-b)}{\sqrt{\frac{c-b}{(c-a)(b-a)}}(d-a)} \\ &= \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} \end{aligned}$$

以上から、題意は示された。

(QED)

[rem] cross ratio のセミコロンについて

cross ratio のセミコロンは Riemann 幾何学における 4 つの index をもつ、記号 R_{hijk} の対称性と同じような、対称性のなごりである。

Δ の体積は cross ratio z の関数をとってかくことができる。

Thm 2.2 (S. Bloch and D. Wigner)

$z \in \mathbb{C}$ ($\text{Im}(z) > 0$) とする。このとき、この cross ratio をもつ simplex Δ の体積 $V(z)$ は、

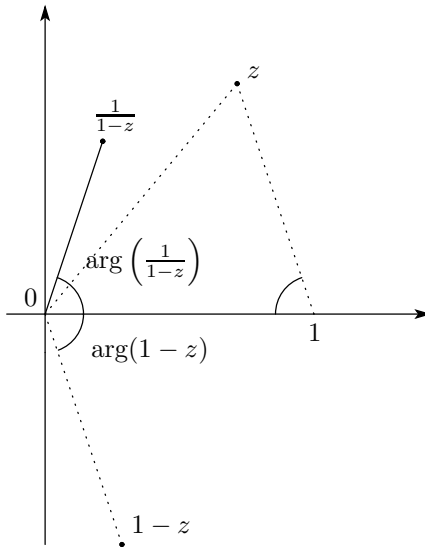
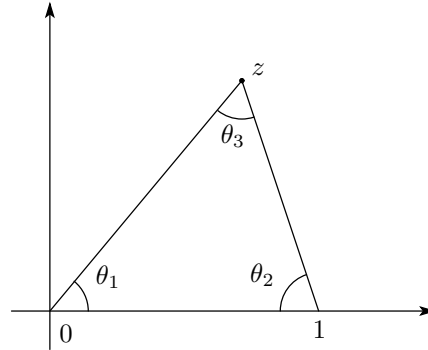
$$V(z) = \text{Im} L_2(z) + \log |z| \arg(1-z)$$

とかくことができる．また， $V(z)$ ($\text{Im } z > 0$) という対応は， $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ 上で，一価の実解析関数として well-defined で， $\mathbb{C} \cup \infty$ 上で，一価の連続関数として，well-defined である．ここで， $\text{Im } z > 0$ における領域での多価関数 $\arg(1-z)$ の枝は $-\pi < \arg(1-z) < \pi$ とする．

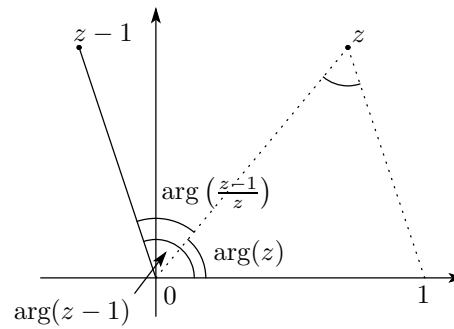
[pf]

前項の Prop 2.1 から simplex として，頂点は $\infty, 0, 1, z$ である．いま， Δ の無限遠点 ∞ から \mathbb{H}^3 の境界の一部 \mathbb{C} への直交射影を考える．これによる像は頂点が $0, 1, z$ の Euclid の意味での三角形である．そこで，その内角を次のようにおく．

$$\theta_1 = \arg(z), \quad \theta_2 = \arg\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad \theta_3 = \arg\left(\frac{z-1}{z}\right).$$



θ_2 について



θ_3 について

この $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は双曲四面体 Δ の面角に対応している．これらの面角を用いた理想四面体の体積を与える公式は

$$V(z) = \sum_{k=1}^3 \Lambda(\theta_k) \cdots (28)$$

である．ここで， $\Lambda(\theta)$ は

$$\Lambda(\theta) = \int_0^\theta \log(2 \sin u) du$$

である．ここで，正弦定理より，射影した三角形の外接円の半径を R とおけば，

$$\sin \theta_1 = \frac{|1-z|}{2R}, \quad \sin \theta_2 = \frac{|z|}{2R}, \quad \sin \theta_3 = \frac{1}{2R}$$

であることと， $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$ から

$$\sum d\theta_k = 0$$

となることから, $V(z)$ の微分を考えると, いまの二つのことから,

$$\begin{aligned}
 dV(z) &= d\Lambda(\theta_1) + d\Lambda(\theta_2) + d\Lambda(\theta_3) \\
 &= -\log(2 \sin \theta_1) d\theta_1 - \log(2 \sin \theta_2) d\theta_2 - \log(2 \sin \theta_3) d\theta_3 \\
 &= -\log\left(\frac{|1-z|}{R}\right) d\theta_1 - \log\left(\frac{|z|}{R}\right) d\theta_2 - \log\left(\frac{1}{R}\right) (-d\theta_1 - d\theta_2) \\
 &= -\log|1-z| d\theta_1 - \log|z| d\theta_2 \\
 &= -\log|1-z| d\arg(z) - \log|z| d\arg\left(\frac{1}{1-z}\right) \\
 &= \log|z| d\arg(1-z) - \log|1-z| d\arg(z) \cdots (29)
 \end{aligned}$$

をえる. 一方で,

$$L_2(z) = -\int_0^z \log(1-w) \frac{dw}{w} = -\int_0^z \log(1-w) d \log w$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 dL_2(z) &= -\log(1-z) d \log(z) \\
 &= -\{\log|1-z| + i\arg(1-z)\} d\{\log|z| + i\arg(z)\} \\
 &= -\log|1-z| d \log|z| + \arg(1-z) d \arg(z) \\
 &\quad - i\{\arg(1-z) d \log|z| + \log|1-z| d \arg(z)\}
 \end{aligned}$$

となり,

$$d\text{Im } L_2(z) = -\arg(1-z) d \log|z| - \log|1-z| d \arg(z)$$

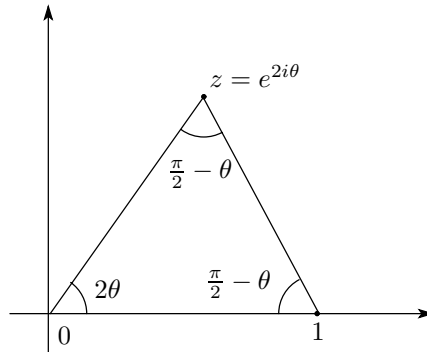
をえる. これと, (29) より, 定数の不確定性を除いて,

$$V(z) = \text{Im } L_2(z) + \log|z| \arg(1-z) \cdots (30)$$

となるが, $z \rightarrow \alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$) を考えれば, $V(z)$ は理想四面体がつぶれることのほかならないので, $V(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \alpha$) であり, 右辺に関しては, 関数として, 0 に収束するので, 定数の差はなく (30) が成り立つ. ここで, 証明の途中だが, (30) の例として, 次の等式を与えておこう.

$$V(e^{2i\theta}) = \text{Im } L_2(e^{2i\theta}) = 2\Lambda(\theta).$$

この式の一つ目の = は $\log|z| = \log|e^{2i\theta}| = \log 1 = 0$ より, (30) において, $\text{Im } L_2(z)$ 以降は 0 となり, 一つ目の = をえる. 二つ目の = は, $z = e^{2i\theta}$ のときの $\partial\mathbb{H}^3 - \infty$ 上では下図のようになっているから,



$$\begin{aligned}
\Lambda(2\theta) &= -\int_0^{2\theta} \log(2 \sin u) du \\
&= -\int_0^\theta \log(2 \sin 2v) 2 \cdot dv \quad (u = 2v \text{ とおいた}) \\
&= -2 \int_0^\theta \log(2 \sin v) dv - 2 \int_0^\theta \log(2 \cos v) dv \\
&= -2 \int_0^\theta \log(2 \sin v) dv - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\theta} \log \left\{ 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - w \right) \right\} (-dw) \quad (v = \frac{\pi}{2} - w \text{ とおいた}) \\
&= -2 \int_0^\theta \log(2 \sin v) dv - 2 \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} \log(2 \sin w) dw \\
&= 2\Lambda(\theta) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)
\end{aligned}$$

ここで、一年の微積の演習問題より、(ref. 培風館「詳説演習微分積分学」p.107)

$$\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2 \sin u) du = 0$$

となるから、

$$V(z) = \Lambda(2\theta) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\Lambda(\theta)$$

となり、二つ目の = も証明できた。

証明に戻ろう。

clame (29) の右辺は $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ 上の well-defined smooth closed 1-form である。

[証明] $\log z, \log(1-z)$ の外微分を考える。

$$d \log z = \frac{dz}{z}, \quad d \log(1-z) = \frac{dz}{1-z}$$

であるから、

$$d \log z \wedge d \log(1-z) = \frac{dz}{z} \wedge \frac{dz}{1-z} = 0.$$

一方で、

$$\begin{aligned}
d \log z &= d(\log |z| + i \arg(z)) \\
&= d \log |z| + i d \arg(z) \\
d \log(1-z) &= d(\log |1-z| + i \arg(1-z)) \\
&= d \log |1-z| + i d \arg(1-z)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
0 &= d \log z \wedge d \log(1-z) = \{d \log |z| + i d \arg(z)\} \wedge \{d \log |1-z| + i d \arg(1-z)\} \\
&= d \log |z| \wedge d \log |1-z| - d \arg(z) \wedge d \arg(1-z) \\
&\quad + i \{d \log |z| \wedge d \arg(1-z) + d \arg(z) \wedge d \log |1-z|\} \\
&= d \log |z| \wedge d \log |1-z| - d \arg(z) \wedge d \arg(1-z) \\
&\quad + i \{d \log |z| \wedge d \arg(1-z) - d \log |1-z| \wedge d \arg(z)\} \cdots (*)
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$d((29) \text{ 式の右辺}) = (*) \text{ の虚部} = 0$$

をえる。

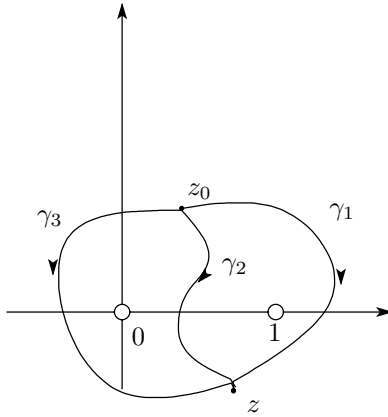
次に、 $V(z)$ を一価関数に拡張する。いままでは $\text{Im } z > 0$ という仮定のもとであった。また、 $\alpha \in \mathbb{R} \cup \infty$ ($\alpha \neq 0, 1$) に対して、

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} V(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \text{Im } L_2(z) + \log |z| \arg(1-z) = 0$$

より, $\{\text{Im } z > 0\} \cup (\mathbb{R} - \{0, 1\}) \cup \infty$ で, $V(z)$ は定義できた. $\text{Im } z < 0$ なる z に対しては, いまの clame から, $\text{Im } z_0 > 0$ となる z_0 を適当にとり, z_0 と z とつなぐ path γ をとり,

$$V(z) = V(z_0) + \int_{\gamma} \log |z| d \arg(1-z) - \log |1-z| d \arg(z)$$

と定義し, 下半分にも拡張する.



ここで問題となるのは, 下図のような状況で $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はどれも互いに homotopic ではないので, $V(z)$ の値が異なる可能性が残る. したがって,

$$\int_{\gamma_i} dV(z) = \int_{\gamma_j} dV(z)$$

を示す必要がある. これはすなわち, 0 または 1 のまわりを回る loop に対する積分の値が消えていることを示せばよい. しかし, (30) 式は $V(z)$ が 0 の近くで単関数に拡張できることを示しており, $z \rightarrow 0$ としたとき, $V(z) \rightarrow 0$ ということも示している.

また, (29) 式より従う等式

$$V(z) + V(1-z) = 0$$

を用いることで, 1 の近くの z に関して, $V(z)$ は単関数に拡張できることがわかる. ここで, 次の位数が 3 の関数の線形自己同型を考える.

$$z \mapsto \frac{1}{1-z} \mapsto \frac{z-1}{z} \mapsto z.$$

これは, 上半平面を上半平面に移すことに注意する. このとき, (28) 式は

$$V(z) = V\left(\frac{1}{1-z}\right) = V\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

を導く. そこで, 上の自己同型について

$$0 \mapsto 1 \mapsto \infty \mapsto 0$$

であることから, $V(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \infty)$ がわかる.

(QED)

$V(z)$ は幾何的に上半平面で真の正であることを注意しておこう. 等式

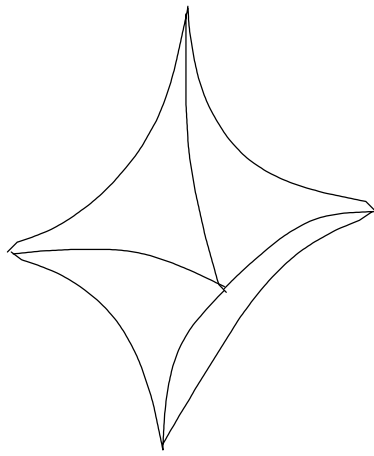
$$V(\bar{z}) = -V(z)$$

から, $V(z)$ は下半平面上で, 真に負の値をとり, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上で 0 をとることがわかる.

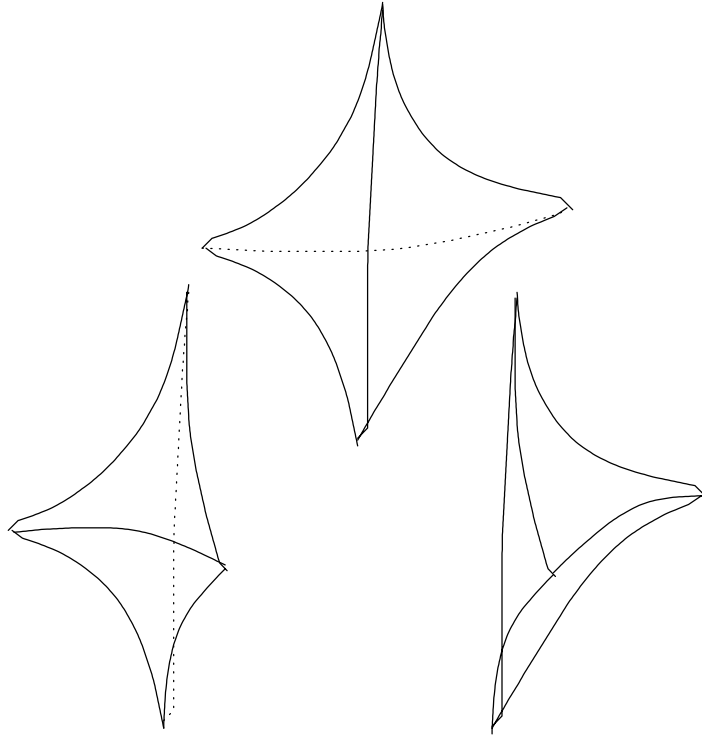
もう一つ重要な性質として, 任意の a_1, \dots, a_4 を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の相異なる 5 点とし, cocycle equation

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i V(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_4) = 0$$

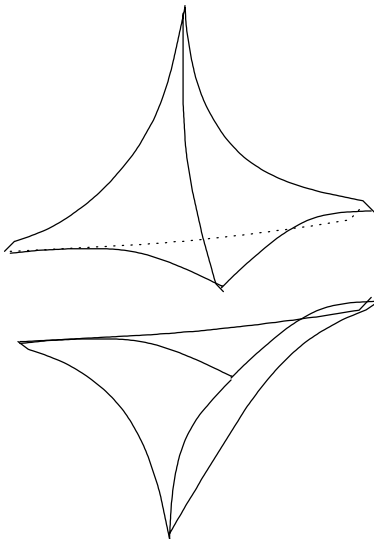
がある. 幾何学的には以下のような, 四面体を上下にあわせたものを



まず、以下のように分割する仕方と、



また、別の分割の仕方、



による，体積を足し引きするわけだから，0 になることがわかる．一方で，解析的には，Abel の関数等式

$$L_2(xx'yy') = L_2(xy') + L_2(yx') + L_2(-xx') + L_2(-yy') + \log^2(x'/y')/2$$

を，用いることで証明できる（ここでは証明は略）．ここで，

$$x' = \frac{1}{1-x}$$

を表す．

もう一つの双曲単体に関係した幾何学的不変量である Dehn invariant を紹介しておこう．有限な 3-単体に対して，Dehn invariant を

$$\sum_{\text{edges}} (\text{辺の長さ}) \otimes (\text{辺の面角}) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$$

で定める．そこで，頂点が無限遠である $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に一つ以上あるような単体に対しては，辺の長さを求める前に，無限遠の各頂点の horospherical nbd で辺の長さを有限にしてから，和をとることにする．もちろん，horosphere のとり方に依存しない．

Thm 2.3 (Dupont, Sah)

totally asymptotic simplex Δ が，一つの頂点から伸びる辺の面角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ であるとすると， Δ の Dehn invariant $\text{Dehn}(\Delta)$ は

$$\text{Dehn}(\Delta) = 2 \sum \log(2 \sin \theta_i) \otimes \theta_i$$

となる．また， Δ から求まる cross ratio z を用いて，Dehn invariant を表そうとすると，

$$\frac{1}{2} \text{Dehn}(z) = \log |1-z| \otimes \arg(z) - \log |z| \otimes \arg(1-z)$$

となる（証明は省略します）

こういったことを勉強してきました．今後は双曲空間についての体積の求め方など，勉強して，何かしらの計算結果がでたらいいなと思っています．

参考文献

[Dupont] Johan L. Dupont 著，『Scissors Congruences, Group Homology and Characteristic Classes』
(World Scientific, 2001)

[Milnor] John Milnor 著，『On Polylogarithms, Hurwitz Zeta Functions, and The Kubert Identities』
『L'Enseignement Mathématique』29(1983),p.281-322

微分位相幾何学と特異点について

藤井謙一 九州大学大学院数理学府修士1年

私は現在微分位相幾何学の特異点の分野を研究すべく、さまざまな参考書で勉強している。そもそも微分位相幾何学と特異点という題名で取り扱うべき話題は多い。微分位相幾何学と特異点はそれぞれ独立したトピックではなく、互いに密接している。特に微分位相幾何学の立場から C^∞ 級多様体の C^∞ 級写像を研究する際には、特異点は本質的存在として自然と現れる。

この "自然に現れる" 特異点の背後に何が隠されているか、あるいはどんな構造が横たわっているかを学んでいこうと思う。

そもそも、多様体とはどのようなものなのか。多様体というものは、これから研究する微分位相幾何学の大変重要な研究対象である。その本質とは、各点の近くでは(局所的に)よくわかっているのだが、それを全体的に(大域的に)見ようとすると、じつはよくわからない、ということである。この、全体としてわからない不思議な空間、それが多様体である。我々の住んでいる3次元空間について例えてみよう。我々は縦、横、高さという本質的に三つの異なる方向を持った世界に住んでいる。もう少し詳しく言うと、例えば大空を飛んでいる鳥の位置を正確に表すには、ある基準となる点を決めて、そこから東に何メートル、北に何メートル、上に何メートルと言ってやればよい。言い換えれば、我々の空間の点はそうした三つの数で表すことができる。では本当に我々が住んでいる空間の全ての点はたった三つの数で表すことができるのだろうか? 想像してもらいたいのだが、我々のまわりの割合近いところは問題なさそうだが、いざ宇宙規模で考えていくと「本当にそうだろうか?」という気がしてこないだろうか。地球ではどこに行くにも、方向さえ間違えなければ「まっすぐ」行って行き着くことができる。しかしよく考えると、宇宙でも同じことを言える保証はない。どこかで「曲がらないと」行き着けない場所が宇宙のどこかにはあるかもしれないのである。このことから我々の近くは三つの数字で位置が表せるのに、遠くに行くとなんが起きているかよくわからないので、必ずしも三つの数字では位置が表せない、ということになる。

この多様体というんはある意味で一様で、どこにも特殊な点、他の点と変わった点、つまり特異点、はないわけであるが、特異点というものは多様体間の写像を考えると必ずといっていいほど現れるのである。

Mostow rigidity and Simplicial Volume

東京大学大学院数理科学研究科修士課程1年 藤川貴史

§ 1. Mostow rigidity

Theorem (Mostow rigidity) Let M and N be connected, oriented and complete hyperbolic n -manifolds with finite volume ($n \geq 3$). If $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ is an isomorphism, then there exists a unique isometry $f: M \rightarrow N$ s.t. $f_* = \varphi$.

Mostow rigidity, algebraic version

Suppose Γ and Γ' are torsion-free discrete subgroups of Isom^+H^n s.t. both H^n/Γ and H^n/Γ' have finite volumes ($n \geq 3$). If there exists an isomorphism $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$, Γ and Γ' are conjugate. i.e. $\exists g \in \text{Isom}^+H^n$ s.t. $\Gamma' = g \Gamma g^{-1}$

証明の方針 (Non-compactなものを除外し、closedなものに限れば証明はだいぶ楽になる。)

- (1) 基本群の同型 $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ を用いて、ホモトピー同値写像 $f: M \rightarrow N$ を構成する。
- (2) $f: M \rightarrow N$ を universal cover の間の pseudo-isometry $\phi: H^n \rightarrow H^n$ に lift する。pseudo-isometry とは isometry の拡張のようなもので、定義は次のとおり。

Definition (pseudo-isometry)

Let X and Y be metric spaces, and $c_1 > 0, c_2 \geq 0$; constants.

Then a map $f: X \rightarrow Y$ is a $((c_1, c_2)$ -pseudo-isometry.

\Leftrightarrow 「for all $x_1, x_2 \in X$,

$$(1/c_1)dx(x_1, x_2) - c_2 \leq dy(f(x_1), f(x_2)) \leq c_1 dx(x_1, x_2)$$

- (3) $\phi: H^n \rightarrow H^n$ を $\partial H^n = S_\infty^{n-1}$ の間の写像に 1 対 1 連続に拡張。これは、pseudo-isometry の意味を考えれば直感的に分かる。

(実際は、homeomorphism さらには、quasi-conformal map になっている。Mostow rigidity の別証明として、この quasi-conformal map が、実は conformal map であることを示すという方針がある。証明にはやや難しい解析や、 Γ の S_∞^{n-1} または測地線の空間 $S_\infty^{n-1} \times S_\infty^{n-1}$ への作用のエルゴート性を用いる。 Isom^+H^3 と一次分数変換群は自然に

同一視でき、一次分数変換群は Riemann 球面の正則自己同型全体から成る群であって、また等角写像であった。この対応は一般次元でも成り立ち、 $\text{Isom}+\mathbb{H}^n$ と $(n-1)$ -次球面の等角自己同型群 $\text{Conf}(S^{n-1})$ とは同一視できる。従って、この conformal map に対応する $\text{Isom}+\mathbb{H}^n$ の元を用いて isometry $F: M \rightarrow N$ を定義できる。)

(4) Gromov invariant もしくは simplicial volume について

The norm $\| \cdot \|$ on $C_*(X; \mathbb{R})$ is defined by

$$\| c \| := \inf \{ \sum |a_i| ; c = \sum \sigma_i \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m : \Delta^k \rightarrow X ; \text{continuous} \}$$

for $c \in C_k(X; \mathbb{R})$.

この norm がホモロジー群の上の pseudo- norm を次のようにして定める。

Definition (Gromov norm) For $z \in H_k(X; \mathbb{R})$,

$$\| z \| := \inf \{ \| c \| ; c \in Z_k(X; \mathbb{R}) \text{ s.t. } [c] = z \}$$

Let $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$ or \mathbb{R} and let M be a connected, oriented and closed n -manifold. Then, $H_n(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

$H_n(M; \mathbb{Z})$ の生成元を M の fundamental class といい $[M]$ と表記する。

$[M]$ の Gromov norm $\| [M] \|$ を M の Gromov invariant または simplicial volume といい、以下、 $\| M \|$ と表記する。Mostow rigidity の証明には、双曲幾何(負の定曲率幾何)における Gauss-Bonnet の定理の一般次元への拡張ともいえる次の定理を用いる。

Theorem (Gromov) Let M be a closed orientable hyperbolic n -manifold ($n \geq 2$). Then, $\| M \| = \text{Vol}(M)/v_n$

Where $v_n = \sup\{\text{vol}(\sigma) ; \sigma \text{ is any straight } n\text{-simplex}\}$

Remark : v_n は regular ideal simplex の体積に等しく、またそのときに限る。このことを示すのは、一般次元では、ideal simplex の体積を parameter で書こうとすると、だいぶ複雑になるため難しいが、3次元では、上半空間モデルにおいて ideal simplex を 1 点が ∞ となるように配置しておけば、その体積を Lobachevsky 関数を用いて書き表すことは容易である。

proof of theorem) $\| M \| \leq \text{Vol}(M)/v_n$ には少々準備が必要となるので省略。

$\| M \| \geq \text{Vol}(M)/v_n$ は容易。

Let dV be the hyperbolic volume form of M . Then, for any straight cycle $\sum r_i \sigma_i$ which realizes $[M]$,

$$\text{Vol}(M) = \int_M dV = \sum r_i \int_{\Delta^n} \sigma_i^* dV \leq \sum |r_i| v_n$$

infimum をとり、 v_n で両辺を割ることにより、求めたい不等式を得る。 \blacksquare

<Simplicial Volume とは何か?>

simplicial volume のイメージとしては、上述の定理をみる限り、三角形分割をするのに必要な三角形の個数の最小値というよりも、むしろ三角形分割に用いる三角形を **ideal** なものに近づけていったときの極限時の三角形の個数といった感じである。今は、**closed** なものしか考えていないので、**ideal** な三角形で分割することはできないのだが、**non-compact** なものにも **simplicial volume** の定義を拡張すれば、例えば、有名な例としては、**K** を **figure-eight knot** とすると、 $S^3 \setminus K$ は、2 個の **hyperbolic regular ideal simplex** を用いて分割できるので、 $\|S^3 \setminus K\| = 2$ となる。

Example : (i) $\|S^1\| = 0$

今、degree **k** の写像 $\sigma^k : [0,1] \rightarrow S^1 ; \sigma^k(t) = \exp(2k\pi it)$ を考える。 $\sigma^k(0) = \sigma^k(1)$ なので、これは **cycle**,すなわち $H_n(S^1; \mathbb{R})$ の元を定め、 $[S^1] = [\sigma^1]$ となる。従って $\|S^1\| \leq 1$ だが、その一方で、 $[\sigma^k] = k[S^1]$ が成り立ち、 $\|S^1\| \leq 1/k$, 故に $\|S^1\| = 0$ である。■

同様にして、球面やトーラスでも 0 になる。

If **M** permits $f : M \rightarrow M$ s.t. $|\deg(f)| \geq 2$, then $\|M\| = 0$.(easy)

(ii) Σ_g ($g \geq 2$) ; closed surface of genus **g**

Σ_g を **vertex** が 1 点からなる三角形に分割しよう。このとき用いる三角形は $2-2\chi(\Sigma_g)$ 個である。この構成の仕方だが、まず、 Σ_g を **Figure 1** のように、角度 $2\pi/3$ の双曲正 $(12g-6)$ 角形で分割して、その **dual** をとればよい。このとき、各三角形は、角度 $\pi/(6g-3)$ の双曲正三角形である。**Figure 1** では、同じ色の 3 つの部分貼り合わせて、1 つの三角形ができています。さて今、 Σ_g の **n-fold covering space** を $\Sigma_{n(g-1)+1}$ と、その **n-periodic map** φ によって構成する。これを $p : \Sigma_{n(g-1)+1} \rightarrow \Sigma_g$ とおく。**Figure 2** がその状況図である。このとき、 $\deg(p) = n$ である。また、 $\Sigma_{n(g-1)+1}$ は、 $2-2\chi(\Sigma_{n(g-1)+1}) = 2-2n\chi(\Sigma_g)$ 個の三角形で分割されるので、

$$\|\Sigma_g\| \leq (2-2n\chi(\Sigma_g))/n \rightarrow -2\chi(\Sigma_g) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

となる。その一方で、 $\|\Sigma_g\| \geq \text{Vol}(\Sigma_g)/v_2$ (但し、 $v_2 = \pi$) と Gauss-Bonnet の定理 ; $\kappa \text{vol}(\Sigma_g) = 2\pi\chi(\Sigma_g)$ (κ は Gauss curvature ; $\kappa \equiv -1$) と合わせて、

$$\|\Sigma_g\| \geq \text{Vol}(\Sigma_g)/\pi = -2\chi(\Sigma_g)$$

を得る。二つの式を合わせれば、

$$\|\Sigma_g\| = -2\chi(\Sigma_g) = 4g-4$$

となる。

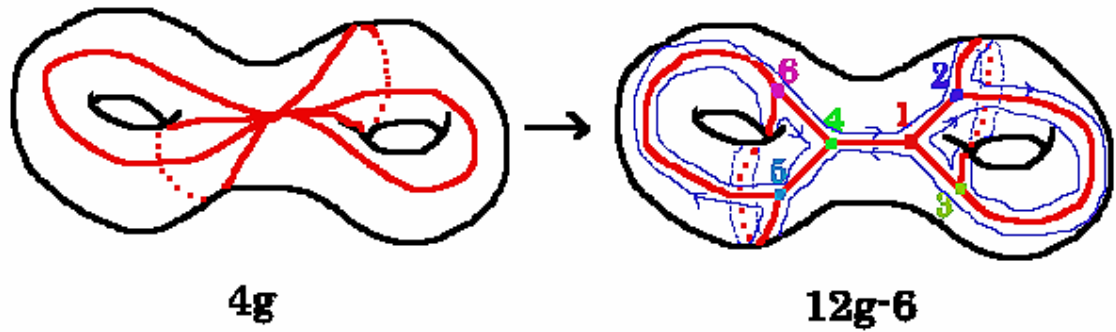


Figure 1

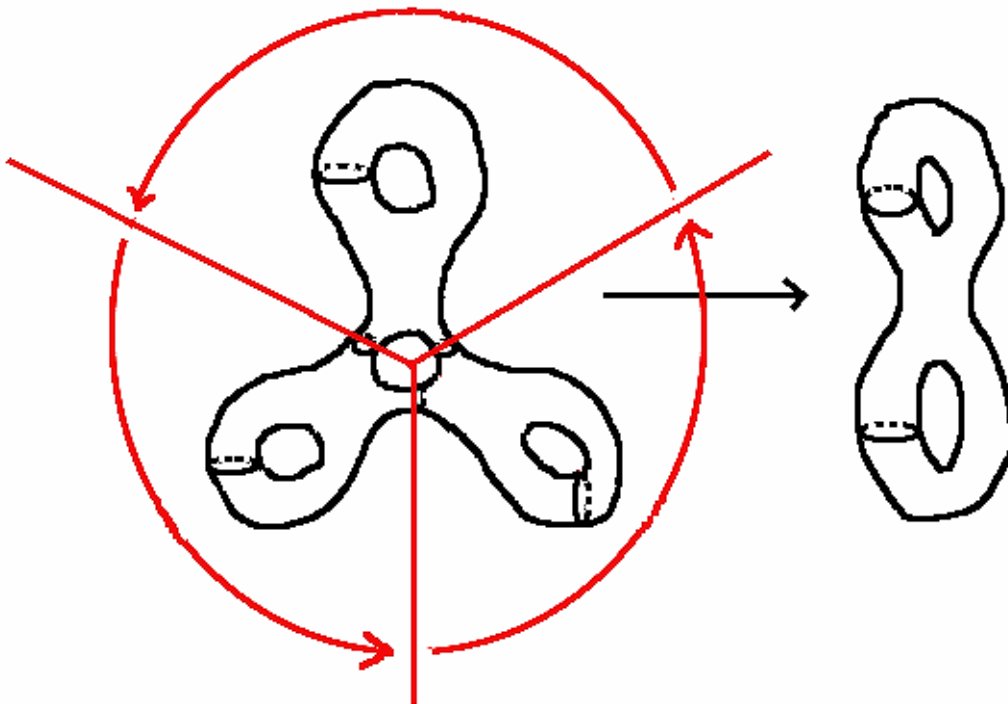


Figure 2 Case $n = 3, g = 2$

(5) Gromov の定理を用いて、つぎのことを示す。

ϕ を(3)で得られた拡張 $\phi: \mathbf{S}_{\infty}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}_{\infty}^{n-1}$ とすると、 $|\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n|$ が、regular ideal simplex(つまり、すべての頂点が無限遠にある正多面体)ならば、 $|\phi(\mathbf{v}_0) \phi(\mathbf{v}_1) \cdots \phi(\mathbf{v}_n)|$ もそうである。(これは、少々面倒。)

(6) (5)を用いて Mostow rigidity の証明を完結させるのだが、この部分に、 $n \geq 3$ という条件が効いてくる。

< 2次元と 3次元の比較 >

Mostow rigidity は、基本群が同型な 2つの有限体積 n 次元双曲多様体 ($n \geq 3$) は isometric であるという大変強い主張である。一方、2次元では、genus g

($g \geq 2$)の topological closed surface Σ_g の許容する双曲構造は、連続濃度存在する。Teichmüller 空間の言葉で述べれば、 Σ_g の Teichmüller 空間; $\text{Teich}\Sigma_g$ は \mathbb{R}^{6g-6} と位相同型である。この違いはどこで生じるのだろうか?

Mostow rigidity の証明は幾通りも知られているが、無限遠球面での議論に帰着させる点では共通である。この無限遠への拡張の際、双曲空間のどのような構造を無限遠球面に持ち込めるのだろうか? 勿論、“球面”であるから、双曲幾何構造、つまり双曲距離を持ち込むことはできないのだが、それより弱い conformal structure なら持ち込むことができる。しかし 2 次元では、次元が低すぎるために、無限遠は S^1 となり、そこに conformal structure は存在しない。もう少し説明を加えると、3-simplex の頂点は、4 つなのに対して、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ の自由度は、3 である。その一方で、2-simplex の頂点の数と $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の自由度は共に 3 で等しい。

互いに相似な双曲空間内の straight simplex の増大列;

$$T_1 \subset \dots \subset T_2 \subset \dots \subset T_n \subset \dots \rightarrow T_\infty : \text{ideal simplex}$$

を考える。3 次元以上では、次の同値が成り立つ。

$$T_i : \text{regular} \Leftrightarrow T_\infty : \text{regular}$$

しかし、2 次元では、ideal simplex に regular という言葉は意味をなさない、つまり T_∞ は常に regular である。

§ 2. Gromov invariant の定義の拡張

We defined the Gromov invariant for connected, orientable and closed (i.e. “compact” and “without boundary”) manifolds. In this section, we extend this definition to (1) disconnected manifolds, (2) non-orientable manifolds, (3) compact manifolds with boundaries, (4) non-compact hyperbolic manifolds with finite volumes (For example $S^3 \setminus K$, $S^3 \setminus L$, where K is the figure-eight knot etc. (hyperbolic knot), L is the Whitehead link.) and (5) open manifolds.

(1) (1) If $M = \cup M_i$;(finitely) disjoint union and each M_i is connected, then, let $\|M\|$ be defined by $\|M\| := \sum \|M_i\|$.

(2) Let M be non-orientable. Then, there exists a double covering $p : M' \rightarrow M$ s.t. M' is orientable. So we define $\|M\|$ by $\|M\| := \|M'\| / 2$

Examples : Let $P^2(\mathbb{R})$: (real) projective surface and K : Klein bottle. Since $P^2(\mathbb{R}) = S^2 / \{\pm I\}$, $\|P^2(\mathbb{R})\| = \|S^2\| / 2 = 0$. Similarly, K is represented as $\mathbb{R}^2 / \langle f, g \rangle$. Where $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$;

$$f(x, y) = (x+1, y), g(x, y) = (-x, y+1).$$

Since the natural projection $\mathbb{R}^2/\langle f, g^2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2/\langle f, g \rangle$ is a double covering, and $\mathbb{R}^2/\langle f, g^2 \rangle$ is homeomorphic to 2-torus T^2 ,

$$\|K\| = \|T^2\|/2 = 0$$

(3) Let M be compact. Then, we define

$$\|M\| := \|[M, \partial M]\|$$

The case of “closed” is included in this definition by the natural identification; For M s.t. $\partial M = \emptyset$, $H_*(M, \emptyset; \mathbb{R}) = H_*(M; \mathbb{R})$.

(4) Let M be non-compact hyperbolic manifolds with finite volumes. Then, we define $\|M\| := \|M_{\text{CPT}}\|$

where $M_{\text{CPT}} := M \setminus M_{\text{cusps}}$ (∂M_{CPT} consists of finite many tori.

詳細は次の section を。)

(5) If M is an open manifold, then there exists a fundamental cycle $c = \sum_{1 \leq i \leq \infty} a_i \sigma_i$ s.t. locally finite i.e. for any compact set $K \subset M$, $\#\{\sigma_i; K \cap \text{Image}(\sigma_i) \neq \emptyset\} \leq \infty$. Then we set $\|c\| = \sum_{1 \leq i \leq \infty} |a_i|$, and define $\|M\| := \inf\{\|c\|; c \text{ is a loc. fin. fundamental cycle}\}$

Example: $\|\mathbb{R}^1\| = \infty$, $\|\mathbb{R}^n\| = 0$ ($n \geq 2$)

§ 3. Gromov'theorem の拡張

Gromov'theorem を 3次元に限り、“non-compact orientable complete hyperbolic manifolds with finite volume”に拡張する。Margulis' lemma により次の事実が分かる。

『Let X be a connected, orientable, non-compact complete hyperbolic 3-manifold with finite volume. Then X has finitely many cusps and any cusp of X is the torus cusp.』

So setting $X_{\text{CPT}} := X \setminus X_{\text{cusps}}$, X_{CPT} is a compact hyperbolic 3-manifold with boundary ∂X_{CPT} which consists of tori. We call X_{CPT} the compactification of X .

連結でない向き付け可能な多様体の基本サイクルを次のように定義する。特に、

$\partial X_{\text{CPT}} = \cup T_i$ (disjoint union of T_i : torus) に対して、

$[\partial X_{\text{CPT}}] := \sum [T_i]$ とする。これに対して次の補題が成り立つ。

Lemma $\|[\partial X_{\text{CPT}}]\| = 0$

proof) $\|S^1\| = 0$ から直ちに従う。■

ここでは、全て 3次元で考えるが、 n 次元の場合の cusp のトポロジーは、 $N \times (0, \infty)$ (N is oriented Euclidean $(n-1)$ -manifold)に限るので、

Euclidean manifold の Gromov invariant が 0 になることを示せば、以下の議論は一般次元でも成り立つ。))

Proposition (1) Let \mathbf{R} be \mathbb{R} or \mathbb{Z} . If \mathbf{M} is a connected compact orientable n -manifold, $H_n(\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}; \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$

The generator $[\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}]$ of $H_n(\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}; \mathbb{Z})$ is called the (relative) fundamental class of \mathbf{M} or $(\mathbf{M}, \partial\mathbf{M})$.

(2) $[c] = [\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}] \Rightarrow [\partial c] = [\partial\mathbf{M}]$

Definition

$\| [\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}] \|_0 := \liminf_{k \rightarrow \infty} \{ \| [c] \| ; c \text{ is a straight cycle s.t.}$

$[c] = [\mathbf{M}, \partial\mathbf{M}] \text{ and } \| \partial c \| \leq k \}$

Lem により、 \mathbf{X}_{CPT} について、この $\| [\cdot, \partial \cdot] \|_0$ を考えることができる。

Theorem (The extension of Gromov's theorem)

$\| [\mathbf{X}_{\text{CPT}}, \partial\mathbf{X}_{\text{CPT}}] \|_0 = \| [\mathbf{X}_{\text{CPT}}, \partial\mathbf{X}_{\text{CPT}}] \| = \text{Vol}(\mathbf{X})/v_3$

§ 4. Mostow rigidity のより強い形

Theorem (Mostow's rigidity ; Strong version)

Let $n \geq 3$, and let \mathbf{M} and \mathbf{N} be connected, oriented, hyperbolic closed n -manifolds. If $f: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ is s.t. $\text{Vol}(\mathbf{M}) = |\text{deg}(f)| \text{Vol}(\mathbf{N})$, then f is homotopic to a $|\text{deg}(f)|$ -fold covering map $p: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$.

§ 5. Bounded Cohomology

以下、 $\mathbf{R} = \mathbb{R}$ とする。

Definition

For $c \in C^k(\mathbf{X}, \mathbf{R})$, we set $\| c \|_\infty := \sup \{ c(\sigma) ; \sigma \in C(\Delta^k, \mathbf{X}) \}$

A cochain $c \in C^*(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ is **bounded** $\Leftrightarrow \| c \|_\infty \neq \infty$

For $\beta \in H^k(\mathbf{X}, \mathbf{R})$, we set $\| \beta \|_\infty := \inf \{ \| c \|_\infty ; [c] = \beta \}$

A cohomology class $\beta \in H^*(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ is **bounded** $\Leftrightarrow \| \beta \|_\infty \neq \infty$

Theorem $\| \cdot \|_\infty$ in $H^*(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ is the dual of $\| \cdot \|$ in $H_*(\mathbf{X}, \mathbf{R})$.

i.e. If $\alpha \in H_*(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ and $\beta \in H^*(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ are s.t. $\beta(\alpha) = 1$,

$\| \alpha \| \| \beta \|_\infty = 1$.

証明には、関数解析の基本的な定理である Hahn-Banach の定理を用いる。

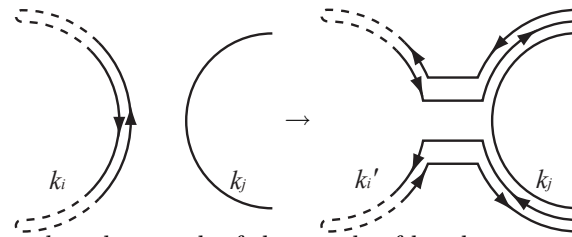
Admissible な絡み目に付随した変形操作

藤原健一（東工大・M2）

扱う対象を整係数ホモロジー球面絞ると、3次元多様体の手術に使う絡み目のクラスを制限でき、またそのクラスの絡み目だけを用いた、絡み目の変形操作（Kirby calculus に対応）がある。現在は扱う対象を、有理数係数に拡張しようと試みています。この研究は、京都大学の葉広和夫氏から拝借したものです。

A homology sphere has a link descripton with a unimodular linking matrix, so that, determinant = ± 1 . A framed link in S^3 is called *admissible* if it is unit-framed and algebraically split, so that, all linking numbers are zero.

It is well-known that there is a surjection from the set of admissible links to the set of integral homology spheres. Habiro introduced a move that preserves admissibility, called *weak slide*, see the following figure, and showed a relation between admissible links and the surgery of homology 3-spheres.



Slide k_i over k_j , where each of the couple of bands may go arbitrarily.

Theorem Let ℓ and $\tilde{\ell}$ be admissible links in S^3 . $(S^3)_\ell$ and $(S^3)_{\tilde{\ell}}$ are homeomorphic if and only if ℓ and $\tilde{\ell}$ are related by a sequence of stabilizations and weak slides.

円周に作用する群について

松田能文 (東京大学大学院数理科学研究科)

円周 S^1 の向きを保つ同相写像全体のなす群を $\text{Homeo}_+(S^1)$ と表し, $f \in \text{Homeo}_+(S^1)$ の固定点集合を $\text{Fix}(f)$ と表す. 群 Γ の S^1 への作用, すなわち, 準同型写像 $\varphi: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ であって次の条件を満たすものを考える.

1. $\text{Fix}(\varphi(\gamma)) \neq \emptyset$ ($\forall \gamma \in \Gamma$)
2. $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \text{Fix}(\varphi(\gamma)) = \emptyset$.

このような作用の例としては, Γ として種数 $g (\geq 2)$ の曲面 Σ_g の基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ をとり, Σ_g に曲率 -1 の Riemann 計量を入れ普遍被覆を上半平面 \mathbf{H}^2 と同一視した時の $\pi_1(\Sigma_g)$ の作用を $\varphi: \Gamma \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \text{Homeo}_+(S^1)$ ととることができる. ここで, $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ は 1 次分数変換で $S^1 = \partial\mathbf{H}^2 \cup \{\infty\}$ に作用している.

群 Γ が上の条件の満たす作用を持つ時, Γ は amenable でないことが松元 [2] によって知られている. 特に有限群, 可換群や可解群は上のような作用を持たない. ここでは, 上のような作用を持つ群 Γ に関するさらに強い必要条件を挙げる. そのために次の二つの命題を用いる.

命題 1 $\varphi: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ を準同型写像とする. $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \text{Fix}(\varphi(\gamma)) = \emptyset$ ならば, ある $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ が存在して, $\text{Fix}(\varphi(\gamma_1)) \cap \text{Fix}(\varphi(\gamma_2)) = \emptyset$ となる. \square

証明は Ghys [1] によって定義された有界オイラー類 (*bounded Euler class*) を用いて行なう.

命題 2 $g_1, g_2 \in \text{Homeo}_+(S^1)$ がそれぞれ固定点を持つが $\text{Fix}(g_1) \cap \text{Fix}(g_2) = \emptyset$ であると仮定する. このとき, ある自然数 $N \geq 1$ が存在して g_1^N, g_2^N の生成する $\text{Homeo}_+(S^1)$ の部分群 $\langle g_1^N, g_2^N \rangle$ は階数 2 の自由群と同型である. \square

証明は十分大きい N に対して $\text{Fix}(g_1)$ と $\text{Fix}(g_2)$ の十分小さな近傍にない点が g_1^N, g_2^N の非自明で既約な語 $w = g_1^{e_1 N} g_2^{f_1 N} \dots g_1^{e_m N} g_2^{f_m N}$ により, $\text{Fix}(g_1)$ の近傍と $\text{Fix}(g_2)$ の近傍の間を行き来し, 決して元に戻ることがないことを見ることで行なわれる.

なお, この方法は「初等的ではない (Gromov の意味での) 双曲群は階数 2 の自由群と同型な部分群を持つ」という命題の証明を真似たものである.

この二つの命題より, 次の定理が得られる.

定理 3 準同型写像 $\varphi : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ であって次の条件を満たすものが存在すると仮定する .

1. $\text{Fix}(\varphi(\gamma)) \neq \emptyset$ ($\forall \gamma \in \Gamma$)
2. $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \text{Fix}(\varphi(\gamma)) = \emptyset$.

このとき , Γ は階数 2 の自由群と同型な部分群を持つ . \square

階数 2 の自由群と同型な部分群を持つ群が amenable でないことおよび amenable でないが階数 2 の自由群と同型な部分群を持たない群が存在することが知られているので , 定理 3 は松元 [2] の結果の一部の拡張になっている .

注意 4 群 Γ が階数 2 の自由群と同型な部分群を持つからといって , 定理 3 の条件にあるような作用を持つとは限らない . 例えば , $\text{SL}(n, \mathbf{Z})(n \geq 3)$ は階数 2 の自由群と同型な部分群を持つが , 任意の準同型写像 $\varphi : \text{SL}(n, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ の像は有限であることが Witte [3] により示されている .

命題 2 の証明の方法が示唆するように , 定理 3 の条件にある作用には双曲性が見え隠れしていると思える . そこで希望的観測ではあるが , 次のような予想を考えることができる .

予想 5 G を $\text{Homeo}_+(S^1)$ の部分群であって次の条件を満たすものとする .

1. $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$ ($\forall g \in G$)
2. $\bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g) = \emptyset$.

このとき , G は (Gromov の意味での) 双曲群である . \square

参考文献

- [1] E. Ghys, *Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée*, The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), 81-106, Contemp. Math., 58, III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [2] S. Matsumoto, *Numerical invariants for semiconjugacy of homeomorphisms of the circle*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), no. 1, 163-168.
- [3] D. Witte, *Arithmetic groups of higher \mathbf{Q} -rank cannot act on 1-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 333-340.

4次元位相多様体

松本 美保

千葉大学大学院自然科学研究科情報数理学専攻

現在、1990年に出版された Freedman と Quinn の ”Topology of 4-Manifolds” を読んでいる。1981年に Freedman は 4次元ポアンカレ予想の解決を含む単連結 4次元位相多様体の分類定理の証明に成功した。基本群が自明でない 4次元位相多様体の分類も、ある程度 Freedman と Quinn によってなされている。しかし、まだ分からない部分が残されている。上にあげた本を読みながら基本群が自明でない 4次元位相多様体の分類を、部分的にでも完成に近づくような発見をしたい。今は 1章の basic tools を読み、framed immersion や Whitney disk, finger move, transverse sphere など基本的な道具を学び、2章の capped surface のところを読んでいる。4次元ポアンカレ予想を解決したのは、Freedman だが、Quinn が考えた capped grope などを使って、4次元位相多様体の分類も進展する可能性があると考え。私はこれから Freedman と Quinn による 4次元位相多様体の分類を勉強し、さらに分類を進めたい。

1. 研究題目

曲面の基本群

2. 名前

宗貞 亜由美 (ayumi munesada)

3. 所属

山口大学大学院理工学研究科

数理科学専攻 博士前期過程 M1

4. 研究内容

space 上の 1 点を fix し、その点を始点、終点とする path(loop) の全体を考える。path をつなげるにより積が導入でき、homotopy class を考えると、これは group をなす。この group のことを与えられた space の fundamental group と呼ぶ。(記号で書くとすれば、 $\pi_1(X, x_0)$; x_0 : base point)

一般的に、 $\pi_n(X, x_0)$ を定義することができ、the n -th homotopy group という。

fundamental group π_1 の計算方法として、幾何的アプローチ'covering space' と、代数的アプローチ'the Van Kampen theorem' を用いるものがあり、最近になって後者について取り組み始めた。

現在は、W.S.Massey 「Algebraic Topology」を読んでおり、とりあえずは、もう少し群論を学び the Van Kampen theorem とその周辺の事柄を知ったところで、まずは、

- 閉曲面

- (a) S^2

- (b) $T(i)$: T (:tori) の i 個の連結和

- (c) $P(j)$: P (:projective plane) の j 個の連結和

の fundamental group の計算と、これら閉曲面の分類

- Knot における fundamental group の計算

について触れたい。

現状は、周辺知識を多く身に付けることに重点を置いたものである。なのでこの先どういったことが学びたいのかが曖昧である。漠然とではあるが、higher homotopy group へと話を広げて考えてみたいと思っている。

最近勉強していること

村井智美 (東京工業大学)

Dale Rolfsen の Knots and Links を読んで被覆空間のホモロジーについて勉強している。

K を S^3 内の結び目とし、 $X = S^3 - K$ とおく。 X 上の n 重巡回被覆空間 \tilde{X}_n のホモロジー $H_1(\tilde{X}_n)$ をザイフェルト曲面を利用して求める。

M を K のザイフェルト曲面、 $N \cong \text{Int } M \times [-1, 1]$ とし、 $Y = S^3 - M$ とおく。 \tilde{X}_n は Y のコピー Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} と N のコピー N_0, N_1, \dots, N_{n-1} を貼り合わせて構成されることが知られている。次に M の種数を g とし $H_1(M)$ の生成元を $x_0, x_1, \dots, x_{2g-1}$ 、 $H_1(Y)$ の生成元を $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2g-1}$ とする。 N_i の境界を N_i^+ 、 N_i^- とする ($i = 0, 1, \dots, n-1$)。 $H_1(Y_i)$ の生成元を $\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{2g-1}^i$ 、 N_i^+ に含まれる $H_1(N_i)$ の生成元を $x_0^{i+}, x_1^{i+}, \dots, x_{2g-1}^{i+}$ 、 N_i^- に含まれる $H_1(N_i)$ の生成元を $x_0^{i-}, x_1^{i-}, \dots, x_{2g-1}^{i-}$ とする。 ($i = 0, 1, \dots, n-1$)。 次の関係が成り立つ:

$$\begin{cases} x_j^{i+} = \sum_{k=0}^{2g-1} a_{jk} \alpha_{jk}^{i+1} & \text{in } H_1(Y_{i+1}) \\ x_j^{i-} = \sum_{k=0}^{2g-1} b_{jk} \alpha_{jk}^i & \text{in } H_1(Y_i) \\ (i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, 2g-1) \end{cases}$$

$H_1(N_i)$ において、 $x_j^{i+} = x_j^{i-}$ より

$$\sum_{k=0}^{2g-1} a_{jk} \alpha_{jk}^{i+1} = \sum_{k=0}^{2g-1} b_{jk} \alpha_{jk}^i \quad (1)$$

$(i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, 2g-1)$

したがって

$$H_1(\tilde{X}_n) = \langle \alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{2g-1}^i (i = 0, 1, \dots, n-1), \gamma \mid \text{関係式 (1)} \rangle$$

figure-eight knot に対して、 S^3 内の手術を利用して $H_1(\tilde{X}_3)$ を求めることも勉強した。 今後は、torsion invariant について勉強する予定。

結び目の補空間に入る foliation の depth について

村井 紘子

奈良女子大学大学院 人間文化研究科 複合現象科学専攻

三次元多様体内の結び目の補空間に foliation と呼ばれる構造を入れ、その構造を調べることによって結び目を研究しており、現在は特に foliation の depth と呼ばれる値について考察している。

まず結び目に関する用語を説明する。三次元多様体 M に埋め込まれた、向き付けられた S^1 のことを結び目という。 M 内の結び目 K に対して $\overline{M \setminus N(K)}$ ($N(K)$ は K の tubular neighbourhood) を K の補空間という (詳しくは [5],[7] を参照のこと)。

次に foliation に関してごく簡単に述べることにする。興味を持たれた方は [1],[6] を参照して頂きたい。三次元多様体 M の codimension 1 の C^r -foliation とは leaf と呼ばれる、互いに disjoint な二次元の部分空間への M の分解のことである。

foliation \mathcal{F} に対しては depth という値が次のように定まる。まず、帰納的に \mathcal{F} の leaf L の depth を定める。 \mathcal{F} の compact leaf を depth 0 leaf と定義し、 $k \geq 1$ に対して L が depth $(k-1)$ leaf に approach する (すなわち $\overline{L} \setminus L$ が k 未満の depth をもつ leaves から成り、そのうち少なくとも 1 枚が depth $(k-1)$ leaf である) とき、 L を \mathcal{F} の depth k leaf と呼び、 $\text{depth}(L) = k$ とかく。

Foliation \mathcal{F} に対して、 \mathcal{F} の任意の leaf が高々 depth $k (< \infty)$ で、 k がこれを満たす最小の整数であるとき、 \mathcal{F} は depth k foliation であるといい、 $\text{depth}(\mathcal{F}) = k$ とかく。また、このような整数 k が存在しないとき、 \mathcal{F} の depth は ∞ であるという。

結び目の補空間と foliation の関係に関しては下記の結果が知られている ([4])。

定理. (Gabai)

K を 三次元球面 S^3 内の結び目とし、 S を K の minimal genus Seifert surface とする。このとき K の補空間 $E(K)$ には $S' (= S \cap E(K))$ を compact leaf としてもち、その境界への制限が simple closed curves から成るような taut, finite depth C^0 -foliation が存在する。

この定理に基づき、Cantwell-Conlon は結び目の補空間に入る foliation の depth の最小値として、結び目の depth という不変量を定義し研究を行ってきた ([2],[3])。彼等の一連の研究では多くの場合 depth 0 leaf, すなわち compact leaf が一枚だけであるという仮定の下に議論されていることから、私は特に「depth 0 leaf を 1 枚しかもたない foliation の depth と 2 枚以上の depth 0 leaves を許容する foliation の depth との間に差がある

のか」という問題意識に基づいて研究を行い, 実際にそれらの間には差があるという結果を得た. 具体的には depth 0 leaves を 2 枚以上もつ foliation が構成される典型的な例である, knot の cyclic branched cover を 0-surgery して得られる空間に対し, 上記の二つの値に差があることを示す例を得た.

参考文献

- [1] César Camacho, Alcides Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Translated by S.E. Goodman, Birkhäuser
- [2] J.Cantwell and L.Conlon, *Depth of knots*, Topology and its applications, 42(1991), 277-289
- [3] J.Cantwell and L.Conlon, *Foliations of $E(5_2)$ and related knot complements*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 118(1993), 3
- [4] D.Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds III*, J.Differential Geom. 26(1987), 479-536
- [5] D.Rolfsen. *Knots and links*, Publish or Perish, Berkeley, CA(1976)
- [6] 田村一郎 『葉層のトポロジー』 数学選書, 岩波書店 (1976)
- [7] 河内明夫 編著 『結び目理論』 シュプリンガーフェアラーク (東京) 社 (1990)

θ -曲線と手錠型グラフの数え上げ

森内 博正

大阪市立大学大学院 理学研究科 数物系専攻

後期博士課程 1年

空間グラフとはグラフを3次元球面 S^3 へ埋め込んだものである。グラフが2つの頂点とそれらを繋ぐ3本の辺からなるときに、その空間グラフを θ -曲線という。また、グラフが2つの頂点とそれらを繋ぐ1本の辺、およびそれぞれの頂点を両端点にもつ2本のループからなるとき、その空間グラフを手錠型グラフという。

我々はタングルと θ -基本多面体を利用して、7交点以下の素な θ -曲線と6交点以下の素な手錠型グラフの数え上げを行なった。それは、交点の少ないものから順に θ -曲線と手錠型グラフを数え上げられるという利点がある。ここで、 θ -基本多面体とは3価頂点が2個で、他の頂点は全て4価であり、2辺形を含まない連結な平面グラフのことである。4価頂点が7個以下の素な θ -基本多面体は24個存在し、4価頂点に代数タングルと呼ばれる特殊なタングルを代入することで7交点以下の素な θ -曲線と6交点以下の素な手錠型グラフを全て数え上げることができる。

やました あつし
山下 温 (東京大学数理科学研究科 M1)

- 指導教官：坪井 俊 教授
- E-mail アドレス：yonster@ms.u-tokyo.ac.jp
- 研究題目：無限次元トポロジー

- 専門について
 - ☒ 無限次元トポロジーというのは耳慣れない分野かと思いますが，general topology の一分野で，無限次元多様体というものを主な対象とします．たとえば閉曲面の同相群は，コンパクト開位相を入れることによって，この無限次元多様体になります．
 - ☒ 有限次元位相多様体は \mathbb{R}^n と同相な開集合で覆われているものとして定義されますが，無限次元の場合は， \mathbb{R}^n のかわりに何を使うかで色々な種類の多様体があります．代表的なのは可分ヒルベルト空間 l_2 を使うものです．このほかに，ヒルベルト立方体（単位閉区間の可算直積）や， l_2 のうち有限座標以外が 0 な点全体のなす部分空間 l_2^f を使ったりしたのがあります．
 - ☒ 数学にはあらゆる分野で無限次元の対象が現れます．無限次元多様体論の応用範囲は実は広いのではないかと考えています．
 - ☒ まだ勉強を始めたばかりです．質問されても答えられないことがあるのを御承知ください．
- 周辺分野として，野性的 (wild) なものを含む位相的埋め込みにも興味があります．
- あまり関係ない分野では，数理論理学において，直観論理の層意味論というものを少しかじりました．位相空間の開集合の大きさを命題の真偽の度合いを計るという不思議な世界です．
- 昔は鉄道ファンでした．今はほとんど鉄道に関することはやっていません．そういえば，NHK の JR 最長片道切符の旅というのがありましたが，あの経路が本当に最長であることを手短かに証明するにはどうしたらいいのでしょうか？

反復積分

山田恭大

東京大学大学院数理科学研究科修士課程 2 年

トポロジー新人セミナー 2004

8 月 1 日 ~ 8 月 4 日

1 はじめに

このアブストラクトでは Chen の反復積分の理論について現在自分が扱っている内容を中心にごく簡単に振り返り、また今後の研究の方向性についても考えたいと思います。

2 Chen の反復積分

反復積分で一番基本的なのは 1 次微分形式の反復積分です。 M を C^∞ 多様体、 $PM = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \text{piecewise smooth}\}$ (path space)、 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in A^1(M)$ (1 次微分形式全体の集合) とします。 $\gamma \in PM$ に対して $\gamma^*\omega_j = f_j(t)dt$ ($j = 1, 2, \dots, r$) として、

$$\int_\gamma \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r = \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r \leq 1} f_1(t_1) f_2(t_2) \dots f_r(t_r) dt_1 \dots dt_r$$

と置きます。これが 1 次微分形式の反復積分です。このような値を対応させる事によって、 $\int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r$ は PM 上の関数、つまり $A^0(PM)$ の元とすることができます。これを一般化して、微分形式 $\omega_j \in A^{p_j}(M)$ ($j = 1, 2, \dots, r$) から次のようにして path space 上の微分形式 $\int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r \in A^{p_1+p_2+\dots+p_r-r}(PM)$ を作る事ができます; $\Delta_r = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r \leq 1\}$ 、 $\Phi : \Delta_r \times PM \rightarrow M^r$ 、 $\Phi(t_1, \dots, t_r, \gamma) = (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_r))$ 、 $\omega_1 \times \dots \times \omega_r = \pi_1^*\omega_1 \wedge \dots \wedge \pi_r^*\omega_r$ (ただし $\pi_j : M^r \rightarrow M$ は第 j 成分への projection) として、

$$\int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r = \int_{\Delta_r} \Phi^*(\omega_1 \times \dots \times \omega_r) \in A^{p_1+p_2+\dots+p_r-r}(PM)$$

と定義する。

Remark Path space、あるいは以下に考える based loop space、free loop space は普通の意味での多様体ではなく、“無限次元の”多様体ですから、その上の微分形式といった場合には意味が曖昧です。これについて、例えば Chen[2] では可微分空間 (differentiable space) という概念を用いて定式化しています。他にも path space を Hilbert 空間をモデルにした多様体 (Hilbert 多様体) として定式化する方法などがあるようですが、ここでは詳細には立ち入らない事にします。実際に行う微分形式の操作は外微分や引き戻しなどごく基本的な操作のみですので、それほど混乱は生じないと思います。□

以下、一点 $p \in M$ を固定し、 $\Omega M = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$ (based loop space) と置き、微分形式 $\int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r$ を ΩM に制限して $A^*(\Omega M)$ の元とすることにします。この時次の外微分の公式が成り

立ちます;

$$d \int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r = \sum_{i=1}^r (-1)^i \int \omega_1 \dots d\omega_i \dots \omega_r + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i \int \omega_1 \dots (\omega_i \wedge \omega_{i+1}) \dots \omega_r \quad (1)$$

(符号は微妙、ここでの符号も正確ではない) この公式によって、 $B(M)$ を $\{\int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r | \omega_j \in A^*(M), r = 0, 1, 2, \dots\}$ で生成される $A^*(\Omega M)$ の部分空間とすると、これが subcomplex であることが分かります。実は $B(M)$ は外積を取る操作に関して閉じていて (シャッフル積) subd.g.a. (differential graded algebra) です。この時次の定理が成り立ちます。

Theorem1[2] 多様体 M を単連結とする。この時 inclusion $B(M) \hookrightarrow A^*(\Omega M)$ はコホモロジーの同型

$$H^*(B(M)) \cong H_{DR}^*(\Omega M)$$

を誘導する。□

次に $B(M)$ の 0 次元コホモロジー $H^0(B(M))$ を考えます。 $H^0(B(M))$ の元は ΩM 上の関数であってその連結成分上で一定値を取るものです。つまり ΩM 上の関数であって、loop を homotopy で動かしてもその値が変わらないようなものです。すなわち M の基本群 $\pi_1(M; p)$ 上の関数と思えます。 $B_s(M)$ を長さ s 以下の反復積分全体、つまり $\{\int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_r | 0 \leq r \leq s\}$ で生成される $B(M)$ の subcomplex、 $I = \{\sum_i a_i \alpha_i \in \mathbb{R}\pi_1(M; p) | \sum_i a_i = 0\} \subset \mathbb{R}\pi_1(M; p)$ (augmentation ideal) とします。この時、自然な pairing

$$H^0(B(M)) \times \mathbb{R}\pi_1(M; p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が pairing

$$H^0(B_s(M)) \times \mathbb{R}\pi_1(M; p)/I^{s+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

を誘導する事が分かり、これについて次の定理が成り立ちます。

Theorem2[2] 上の pairing は同型

$$H^0(B_s(M)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\pi_1(M; p)/I^{s+1}, \mathbb{R})$$

を誘導する。□

一般に、何か cochain complex (A^*, d) が与えられると、それを使って新しく bar complex $(B^*(A^*), d)$ という複体を構成することができます。多様体の de Rham complex $(A^*(M), d)$ から bar complex $(B^*(A^*(M)), d)$ を作ると、これは適当な条件の下で上に構成した反復積分のなす複体 $B(M)$ と複体として同型になる事が分かります。従って上記の 2 定理は多様体上の de Rham complex の bar complex に関する定理であるといえます。上の構成では反復積分を ΩM に制限して考えましたが、free loop space $LM = \{\gamma \in PM | \gamma(0) = \gamma(1)\}$ に制限して同様の議論を進めることができます。この時外微分公式 (1) は少し形が変わり、上記 $B(M)$ の代わりに $C(M) = \{p_0^* \omega_0 \wedge \int \omega_1 \dots \omega_r | \omega_j \in A^*(M), r = 0, 1, \dots\}$ ($p_0 : LM \rightarrow M, p_0(\gamma) = \gamma(0)$) を考えると、これは $A^*(LM)$ の subcomplex になる事が分かります。これに関して、Getzler-Jones-Petrack[3] によると定理 1 と同様に次が成り立ちます。

Theorem3[3] 多様体 M を単連結とする。この時 inclusion $C(M) \hookrightarrow A^*(LM)$ はコホモロジーの同型

$$H^*(C(M)) \cong H_{DR}^*(LM)$$

を誘導する。□

LM においては bar complex の代わりに cyclic bar complex $C^*(A^*(M))$ という複体を考えるとこれは $C(M)$ と複体として同型になります。

3 今後の方針など

このように、反復積分を用いると多様体上の loop space、あるいは path space の性質を調べる事ができます。今後、まずはいくつかの具体例を計算できればいいと考えています。つまり何か具体的に多様体を持ってきて、その loop space のホモロジーやコホモロジーの構造を反復積分を用いて実際に記述してみたいということです (loop space のホモロジーについては上では述べませんでした、Chen による “formal connection” を用いる方法が知られています)。Based loop space においては loop の合成によってホモロジーにも積構造がもたらされます。更に最近では free loop space のホモロジーにも積構造が入り、それによって Lie 環の構造が入ることなども分かってきています (例えば Chas-Sullivan[1])。そういった積構造をも含めて、反復積分による記述ができればいいと考えています。

その他にも、反復積分の理論はとても応用が広いようです (自分はまだまだ分かりませんが)。Hain[4] には反復積分に関連する話題が広く書かれています。

参考文献

- [1] M.Chas, D.Sullivan, *String Topology*, math.GT/9911159
- [2] K.T.Chen, *Iterated Path Integrals*, Bull.Amer.Math.Soc.83(1977), 831-879
- [3] E.Getzler, J.D.S.Jones, S.Petrack, *Differential Forms on Loop Spaces and the Cyclic Bar Complex*, Topology30(1991), 339-371
- [4] R.Hain, *Iterated Integrals and Algebraic Cycles: Examples and Prospects*, math.AG/0109204

結び目理論を勉強し始めて

山形大学大学院理工学研究科数理科学専攻M1 山本 恭平

現在、結び目理論を内田 吉昭先生の下で1年ちょっと勉強しています。今読んでいるのは Rolfsen の「Knots and Links」です。被覆空間や基本群を扱うのが最近ようやく楽しくなってきたところです。まだ右も左もわからない状態ですが、不変量の研究も楽しそうかな、とも思っています。

Compact Riemann Surfaces

吉永哲雄 (大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻 M1)

平成 16 年 8 月 6 日

現在は 4 回生から読んでいる「代数的位相幾何学」(William Fulton 著 三村護訳 Springer) のリーマン面の章を勉強しています。この章では特にコンパクトリーマン面を扱っており、Riemann-Hurwitz の公式、Riemann-Roch の定理、Abel の定理を勉強しました。

Riemann-Hurwitz の公式は分岐被覆の考え方に基づいて、コンパクトリーマン面間の非定数解析写像とそれらの種数の関係を、Abel の定理は次の Riemann-Roch の定理の続きとして、次数 0 の divisor が有理形関数の divisor になるための条件をそれぞれ示したものです。

さて、Riemann-Roch の定理はコンパクトリーマン面 X 上に divisor D が与えられたときに、 X の種数 g_X と D の次数、及び D が定める有理形関数の空間、有理形微分の空間の次元の関係を示したものです。この定理は X 上の与えられた点を零点や極にもつような有理形関数が存在するかどうかを調べるにはとても有効な道具です。具体的に $X = S^2$ ($g_X = 0$) の場合にこの定理が成り立つことを確かめましたが、 $g_X \geq 1$ になるとその様子を把握するのが非常に難しくなります。

コンパクトリーマン面は関数論、多様体論、代数曲線論など、様々な分野で扱われています。これらの主張を勉強したといっても、抽象的な議論が続いたために証明に時間がかかり、具体例を扱う余裕がありませんでした。なので、今後はコンパクトリーマン面の中でも理論が展開しやすい $g_X = 1$ のとき、つまり、楕円曲線に関する話題をとりあげようと思います。なかでも楕円曲線上の有理形関数に相当する楕円関数が面白い性質をもっているのです。関数論の面からこれを勉強しようと思います。

On Low Dimensional Topology

Gengyu Zhang, M1

Murakami Lab, Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

My major is low dimensional topology. Low dimensional topology studies topological properties of low dimensional manifolds, which includes research on different sub-branches, such as knot theory, graph theory and manifold theory etc. In the past period I did some research on 2-irreducibility of spatial graphs, which is a joint work with Prof. F. Lei and Prof. K. Taniyama. Here spatial graphs also include knots and links. When we try to classify graphs, at the same time we classify some certain links. But it uses only elementary geometric arguments. Sometimes geometry works better than algebraic arguments, for example we can easily know Milnor links are not trivial by geometric arguments instead of finite type invariants.

Since I came to Japan in the last October, I had many chances to attend a lot of seminars on low dimensional topology, and from other people's wonderful talks I know more study directions about low dimensional topology. And I found that to obtain more good results it is necessary to know algebraic invariants, also in some sense geometric methods to study the knot theory also need the thorough understanding of algebraic invariants. Since last October I read the book 'Quantum Invariant of Knots, Links and 3-manifolds', written by Prof. Ohtsuki for 6 months under the guidance of Professor Hitoshi Murakami, only finishing reading the previous 4 chapters. That is a good book which includes a lot of new results on quantum invariant, and I benefit a lot from it.

At present I am reading the papers on Khovanov homology, 'Khovanov homology and the slice genus' by J. Rasmussen and 'On Khovanov invariant for alternating links' by E.S. Lee. Rasmussen introduced an invariant for knots by using Khovanov homology and gave a Khovanov homology proof of the Milnor conjecture, which was first proved by Kronheimer and Mrowka by using gauge theory. I hope I will understand completely the subject as soon as possible, although it is really a difficult subject for me, and then hope that I can use it to solve other problems in the low dimensional topology.

References:

- F. Lei, K. Taniyama and G. Zhang, 2-irreducibility of spatial graphs, preprint.
- J. Rasmussen, Khovanov homology and the slice genus, math.GT/0402131, 2004.
- E.S. Lee, Khovanov's invariants for alternating links, math.GT/0210213, 2002.