3次元多様体論における幾何的手法について

秋吉 宏尚 （あきよし ひろたか）
大阪市立大学数学研究所（OCAMI）

向き付け可能な閉曲面の同相類は，そのオイラー標数により分類されることがよく知られているが，オイラー標数の符号（正負または0）にも重要な意味がある．この符号は，それらの曲面が許容する定曲率リーマン計量の符号と実は一致するのである．３次元ユークリッド空間内の半径 r の球面は定曲率 $1/r^2 > 0$ を持つ（球面幾何構造）．２次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^2$ は定曲率 0 を持つ．トーラスは２次元ユークリッド空間を１次独立な二つの平行移動が生成する等長変換群で割ったものと同相なので，トーラスは定曲率 0 を持つリーマン計量を許容することがわかる（ユークリッド幾何構造）．オイラー標数が負の曲面，つまり種数が 2 以上の曲面については，定曲率 -1 を持つ双曲平面 $\mathbb{H}^2$（たとえばリーマン計量 $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ を持つ上半平面 $\{(x, y) \mid y > 0\}$）を等長変換からなる離散群で割ることで得られることが知られている（双曲幾何構造）．また，ガウス・ボンネの定理から，定曲率曲面のオイラー標数の符号は曲率の符号と一致することもわかるので，曲面が許容することのできる幾何構造の一意性もわかる．

さて，向け付け可能な３次元閉多様体の同相類の分類についてはどうだろうか？まず，それらはオイラー標数では（全く）分類できないことがわかる（オイラー標数は必ず0）．さらに，オイラー標数を導くホモロジーによっても分類されない（３次元球面と同じホモロジーを持つが同相でないものが無数に存在する：たとえばポアンカレ球面など）．では基本群を考えるとどうだろうか？

ポアンカレ予想：基本群が自明な３次元閉多様体は３次元球面と同相だろう．

この講演の目的は，ポアンカレ予想を肯定的に含む形で述べられている（Thurston による）幾何化予想の周辺を概観することである．考えるべき幾何構造は，２次元では３種類だったのに比べて，３次元ではそれらを自然に３次元化したものや低次元の構造の積なども含め，全部で８種類に上る．

幾何化予想を述べるためには少し準備が必要である．

連結和分解：３次元閉多様体 M を，埋め込まれた２次元球面 S^2 に沿って切り開くと二つの連結成分が得られるとき，各連結成分の S^2 と同相な境界に３次元球体を境界に沿って貼りつけることで，２つの３次元閉多様体 M_1, M_2 が得られる．このとき，M は M_1 と M_2 の連結和であるといい，$M = M_1 \# M_2$ と書く．$M = M_1 \# M_2$ ならば成分 M_1，M_2 のいずれかが３次元球面 S^3 と同相であるとき，M は素であるという．

定理 1 (Kneser, Milnor)**.** ３次元閉多様体は有限個の素な多様体の連結和として一意的に表される．

JSJ 分解：任意に埋め込まれた S^2 が（常に）埋め込まれた３次元球体の境界となるような多様体は既約であるという．素だが既約でない３次元閉多様体は球面と円周の直積しかないことがわかる．トーラス体でもクラインの壷上の閉区間束でもないような（トーラスを境界成分として持つかもしれない）３次元多様体は，埋め込まれた任意のトーラス，クラインの壷が境界成分にアイソトピックなとき，非トーラス的であるという．また，曲面上の（特異ファイバーを許容する）円周束をザイフェルト多様体という．

定理 2 (Jaco-Shalen-Johanson)**.** 既約な３次元多様体は極大なザイフェルト多様体と非トーラス的な多様体の和集合として一意的に表される（JSJ 分解）．

定理 1，2 により，任意の 3 次元閉多様体は有限個の（トーラスを境界成分として持つかもしれない）既約な非トーラス的多様体，ザイフェルト多様体，球面と円周の直積の和集合への標準的な分解を持つことがわかる．

ザイフェルト多様体は 3 次元球面構造 S^3， 3 次元ユークリッド構造 $\mathbb{E}^3$，あるいは低い次元の構造の積 $S^2 \times \mathbb{E}^1$，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$，$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, Nil 構造のいずれかを局所モデルとする幾何構造を許容する．ザイフェルト，双曲構造 $\mathbb{H}^3$ 以外に，もうひとつ Sol 構造が存在する．

幾何化予想 (Thurston)：3 次元閉多様体から連結和および JSJ 分解により得られた各多様体は，ザイフェルト構造，Sol 構造，または双曲構造を許容するだろう．

この予想はハーケン多様体と呼ばれる本質的曲面を含む既約多様体に対しては正しいことが Thurston 自身により示された．また，軌道体一意化定理（Thurston により証明のアイディアが述べられたものを，Boileau-Leeb-Proti [1] と Cooper-Hodgson-Kerckhoff [3] が独立に証明した）により，ハーケンでなくても固定点集合を持つような対称性がある場合には幾何化予想が正しいことがわかる．

Hamilton は Ricci flow を用いた幾何化予想証明のためのプログラムを提唱した．その延長として，Perelman による幾何化予想解決という情報が難解なプレプリント [4, 5, 6] とともに流れている．さらに，ごく最近，Cao-Zhu による論文 [2] が出版された．こうしたホットな話題にも触れたい．

参考文献

[1] M. Boileau, B. Leeb and J. Porti, *Geometrization of* 3*-dimensional orbifolds*, Ann. of Math. 162, no. 1 (2005), 195–290.

[2] H.-D. Cao and X.-P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. Math. **10** no. 2 (2006), 165–492.

[3] D. Cooper, C. D. Hodgson and S. P. Kerckhoff, *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds.* With a postface by Sadayoshi Kojima. MSJ Memoirs, **5**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, (2000).

[4] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint, 2002, math.DG/0211159.

[5] ... , *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, 2003, math.DG/0303109.

[6] ... , *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, 2003, math.DG/0307245.