トーラス結び目の結び目群によって定まる Growth Function のパターンに関する研究

奈良女子大学　人間文化研究科　情報科学専攻　博士前期過程　山下研究室　　藤川　優

Growth Function について

群の特徴をとらえる方法は様々にある。その１つとして、Growth Function $g.f.$ があり、$g.f.$ の持つ情報が、近年注目されている。

$g.f.$ は、以下の定義によって与えられる。

generating set$X$ によって表示される群 G の $g.f.$ は、

$gr(G,X)=\sum_{g\in G}t^{l(g)}=\sum_{n\geq 0}\sharp\{g:l_{(g)}=n\}t^n$

但し、$l_{(g)}$ は、generating set X よって生成される語 g の最小の長さである。

Cayley graph を用いて、群を図示することもできる。群 G 表示 $<g_1,g_2,...,g_n|r_1,r_2,...,r_n>$ に関する Cayley graph とは、以下の頂点集合 V と辺集合 E によって与えられるもののことである。

V=G

E=$(v_1,v_2)|v_1g_i$=v_2g_i $(i=1,2,...,n)$

また、結び目に関連した重要な概念のとして、結び目群がある。一般的に、結び目群に対して、$g.f.$ は、有理式で表現されることが知られているが、その計算は、簡単ではない。また、 結び目を変えることによって、 $g.f.$ が変化をするが、どう変化していくのかは、分かっていない。そこで、簡単な例として、 Torus 結び目を考える。Torus 結び目とは、Torus の上を交差することなく回っている結び目のことであり、２つの parameter p,q を変化させることにより結び目が変化する。一般的に、(p,q)Torus 結び目と表記する。

$(n,2)$Torus 結び目について KBMAG を使って SISKIND が $g.f.$ の計算を行っている。

KBMAG は、群の表示を入力し、群の構造を良く表す Autmaton と $(g.f.)$ を出力するソフトウェアである。また、群の表示は、２種類を使用する。一つは、基本的な表示、$<x,y|x^py^{-q}>$、と Wirtinger 表示である。Wirtinger 表示を求めるには、knot/link diagram を描き, 不変量等を計算するソフトウェア KNOT を使用する。

SISKIND によって $(n,2)$ トーラス結び目の $g.f.$ は、計算されたが、その証明はされておらず、$q=2$ の場合のみしか計算されていない為、$g.f.$ が結び目によってどう変化をするのか大変興味深い。

研究の目的

SISKIND の予想から一般の (p,i) Torus 結び目 (i=1,2,..n) の $g.f.$ が、２つの parameter を変化させることによって、その次数と係数が、どの様に変化するか、結び目群の表示の違いから $g.f$ の係数、次数、表示がどう変わるかを考察し、一般の場合についての、$g.f$ を導き出す。また、Cayley graph を描き、KBMAG の結果の FSA との比較を行ない、最短辞書式順序で最適化がされているかを証明し、一般の場合での、最適化の様子を解明する。

$g.f$ の次数、係数比較の方法と結果

$(p,2)$Torus 結び目、$(p,3)$Torus 結び目において、KBMAG で、Wirtinger 表示、一般的な表示、両方を場合分けし、$g.f.$ を計算し、その次数と係数を調べる。$(p,2)$Torus 結び目は、２つの表示についてそれぞれ実験をした。その結果を分母と分子に分けて考察し、さらに、奇数、偶数、結び目、絡み目の 4 つの場合に分類し、それぞれの場合に分け、一般の場合の係数、次数を導き出した。$(p,3)$Torus 結び目においては、Wirtinger 表示の場合、KBMAG での計算が破綻した為、一般の場合の表示のみを行った。$g.f.$ の分子は、かなり複雑な表示となった為、分母についてのみ、同様に、一般の場合について次数、係数を導き出した。どちらも、基本的な表示を用いた方が、$g.f.$ が複雑な表示で出てきた。

最短辞書式順序での FSA の最適化について

(p,K_2)Torus 結び目について、Cayley graph を描き、KBMAG の結果 FSA とを比較し、最短辞書式順序で最適化されているかどうかを調べる。その結果、1 対 1 対応で、最短辞書式順序で表されていることを証明出来た。

今後の展開

実験を継続し、(p,n)Torus 結び目についての結果を得たい。

参考文献

1. C.C アダムス著、金信泰三訳
「結び目の数学　結び目理論への初等的入門
2.RAY D SISKIND 著
「PATTERNS IN GROWTH FUNCTION」
http://www.math.lsu.edu/reu2002/papers/siskind.pdf
3.KBMAG
http://www-gap.mcs.st-and.ac.uk/Packages/kbmag.html

4. Knot

http://www.math.kobe-u.ac.jp/ kodama/index.html