微分幾何学の基礎

慶應義塾大学理工学研究科修士１年　春山 大輔

学部４年次より、S. Helgason の”Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces” という微分幾何学の入門書を読んできました。多様体上に共変微分を定義することで、多様体上でも平行移動や測地線、曲率といった概念が定義できるようになります。これらの道具を用いて、多様体の性質を調べていきました。例えば、曲率が負のリーマン多様体上に描かれた三角形の内角の和が 180 度を超えないことや、余弦定理が成立していないなどの事実を証明することができます。

現在は Lie 群と Lie 環について勉強しています。Lie 群とは群かつ多様体であり、その群演算が滑らかになるような位相群のことをいいます。また、Lie 環とは括弧積[,]が定義された代数のことをいいます。Lie 群の単位元における接平面には Lie 環の構造を入れることができ､Lie 環から Lie 群への(多様体としての)指数写像が定義できます。n 次正則行列全体の集合 $GL(n, \mathbf{R})$の単位元における接平面は n 次行列全体の集合 $M(n, \mathbf{R})$であり、その指数写像は行列としての指数写像と一致しています。

今後の研究テーマはまだ固まっていませんが、シンプレクティック形式や非可換多様体などについて勉強してみたいと思っています。