結び目群について

張 娟姫 (Yeonhee Jang)
大阪大学大学院理学研究科 M1

1. 基本概念
・S^1 の S^3 への埋め込みを結び目という.
・二つの結び目 k_1, k_2 に対し, S^3 の自己同相写像 $h : S^3 \to S^3$ が存在して, $h(k_1) = k_2$ をみたすとき, k_1 と k_2 は同値である (同じ結び目型である) という.
・(結び目群) 結び目の補空間の基本群 $\pi k := \pi_1(S^3 \setminus intV, *)$ を結び目 k の群という.
ここで, $V \cong k \times S^1$ は k の管状近傍 (tubular neighborhood) であり, 基点 $*$ はその境界 $\partial V \cong k \times S^1$ 上から選ぶ.

2. 結び目群
与えられた結び目群 (の射影図) に対して「Wirtinger's algorithm」を使うと, 結び目群の群表示が得られる. 例えば,

$$\begin{aligned}
\pi(trivial\ knot) &= < x > (\cong \mathbb{Z}) \\
\pi(figure-eight) &= < x, y \mid x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy^{-1} > \\
\pi(trefoil) &= < x, y \mid xyx = yxy > \\
&= < a, b \mid a^2 = b^3 >
\end{aligned}$$

一般的に, (p, q)-型のトーラス結び目 (torus knot) $T_{p,q}$ に対して,

$$\pi T_{p,q} =< x, y \mid x^p = y^q >$$

である. しかし, $k \mapsto \pi k$ で定められる関数は単射ではない. 例えば,

$$\begin{aligned}
\pi(square\ knot) &= < x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = zxz > \\
&= \pi(granny\ knot)
\end{aligned}$$

実際, この二つの結び目の補空間はホモトピー同値であり, 結び目群が一致するので Alexander 多項式でも区別できないが, [1] により, 基本群の"peripheral structure"を使って square knot と granny knot の群の間のどの同型写像もその peripheral subgroup を保たないことが証明された.

3. 結び目群の間の関係

Definition 1. (i) *k_1 covers k_2(or k_2 supports k_1) if there is an epimorphism $\pi k_1 \to \pi k_2$.*
(ii) *If G is a finitely generated group normally generated by an element μ, and if $\lambda \in G$, then a knot k kovers (G, μ, λ) (or briefly, k covers G) if there exists an epimorphism $\phi : (\pi k, m, l) \to (G, \mu, \lambda)$, where (m, l) is a meridian-longitude pair.*
(iii) *k realizes λ if k covers G for given $\lambda \in G$.*

Theorem 2 ([3]). *Let G be a finitely generated group that is normally generated by a single element μ, and let $\lambda \in G$. If there exists a knot k that realizes λ, then there exists an infinite number of distinct prime knots that realize λ.*

これによって, 任意の結び目群 πk に対して, 互いに同値でない無限個の結び目 $k_1, k_2, \ldots$ と (peripheral structure を保つ) それらの基本群の間の全射準同型の列 $\cdots \to \pi k_2 \to \pi k_1 \to \pi k$ が存在することがわかる. これは結び目に半順序な関係を与える.

参考文献

[1] R. H. Fox, On the complementary demains of a certain pairs of inequivalent knots, Kon Nederl. Akad. van Wetenschappin Proceedings Series A, 55 (1952), 37–40.

[2] D. Rolfsen, Knots and Links, Mathematics Lecture Series, No. 7. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.

[3] D. Silver and W. Whitten, Knot group epimorphisms, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 15 (2006), 153–166.