SPECIAL ALTERNATING LINK の ALEXANDER 多項式への組合せ論的アプローチ

鄭 仁大

ここでは，現在私が興味を持っている Alexander 多項式への組合せ論的なアプローチと，最近考えていることについて述べます.

Definition 1. L を S^3 に埋め込まれた link，D を L から得られる S^2 上の link diagram とする.

・D が connected diagram であって，D の各 link component に沿って一つの方向に進むと上下交叉点が交互に現れるとき，D は *alternating diagram* であるといい，そのような diagram を持つ link を *alternating link* という.

・D が *unnested diagram* であるとは，D の各 Seifert circle が分ける二つの領域のうち片方には他の Seifert circle が存在しないような diagram のことをいい，alternating かつ unnested な diagram を持つ link を *special alternating link* という.

・D の交点の符号が全て正 (負) であるとき，D を *positive(negative) diagram* といい，そのような diagram を持つ link を *positive(negative) link* という.

Definition 2. $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{m} c_n t^n (c_n \in \mathbb{Z})$ が次の条件をみたすとき，*trapezoidal* であるという.

(1)$c_i \neq 0 (i=1,\cdots,m)$ であって，$c_1,\cdots,c_m$ が全て同符号.

(2)$t^m f(t^{-1})=f(t)$.

(3)$|c_0| \leq |c_1| \leq \cdots \leq |c_{[\frac{m}{2}]}|$.

(4)$c_i=c_{i+1}$ を満たす i が存在する $\Rightarrow i \leq j \leq [\frac{m}{2}]$ を満たす j に対して，$c_i=c_j$.

Alternating link の Alexander 多項式に関する次の予想があります.

Conjecture 3. $\Delta_L(t)$ を alternating link L の Alexander 多項式とするとき，$\Delta_L(-t)$ は trapezoidal である.

この予想は，1979 年に R.Hartley によって two bridged link について，1985 年に K.Murasugi によって algebraic alternating link について，それぞれ肯定的に証明されています.

Theorem 4. (Matrix-tree theorem)

$A=(a_{ij})$ を n 次正方行列 $(a_{ij} \in \mathbb{C})$ として，Γ を $n+1$ 個の頂点 $V(\Gamma)=\{0,1,\cdots,n\}$ を持つ oriented graph, $E(\Gamma)=\{(i,j)|i \neq j;\ i,j=0,1,\cdots,n\}$($\Gamma$ の edge の集合）とするとき，$f_A : E(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める.

$$f_A\big((i,j)\big)=-a_{ij} \quad (i \neq j; i,j=1,2,\cdots,n),$$
$$f_A\big((i,0)\big)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$f_A\big((0,j)\big)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} (j=1,2,\cdots,n).$$

ここで，(i,j) は i を始点，j を終点とする向き付けられた edge とする.

又，$\mathcal{T}(\Gamma;v_0)$:={maximal rooted tree with origin $v_0 \subset \Gamma$} とおく.

このとき，

$$\det(A)=\sum_{T \in \mathcal{T}(\Gamma;0)} \prod_{(i,j)\in E(T)} f_A\big((i,j)\big)$$

が成り立つ．但し，$E(T)$ は T に含まれる edge の集合とする.

Date: 14/7/2006.

この定理の系として次の定理が得られます.

Theorem 5. L を alternating link，D を L の alternating link diagram とする．D の各交叉点を頂点，交叉点を結ぶ各 arc を辺とする球面グラフを考え，そのグラフを同じ D で表すことにする．D の各 edge には下交差点を終点にするように向きを定め，又，link の向きに沿って link conponent を進み，上交叉点を通ったときに左側にある edge に 1, 右側にある edge に $-t$ の値を振るような写像 $\alpha : E(D) \longrightarrow \{1, -t\}$ を考える．さらに，v_0 : D の頂点 を任意に一つ選び fix する．このとき，

$$\Delta_L(t) \doteq \sum_{T \in \mathcal{T}(D;v_0)} \prod_{e \in E(T)} \alpha(e)$$

が成り立つ．但し，各 edge には上で定めた向きが入っているものとし，" $\doteq$ " は，$\pm t^l$ 倍 $(l \in \mathbb{Z})$ を除いて等しいという意味である.

この定理から，alternating link diagram 上で maximal rooted tree を数え上げることが Alexander 多項式の係数の情報を持っていることがわかります．私はこの組合せ論的な方法を用いて，上記の trapezoidal conjecture の special alternating link のケースに対するアプローチを考えています.

special alternating link の diagram に関する性質として以下のようなことが分かっています.

Proposition 6. D を connected link diagram とするとき，D が以下の (1)〜(3) のうち, 二つを満たすとき，残りの一つも満たす.

(1)D は alternating diagram.

(2)D は unnested diagram.

(3)D は positive diagram, 又は negative diagram.

Proposition 7. 任意の link は unnested diagram を持つ.

最近，Alexander polynomial を求めるために Matrix-tree theorem を Alexander matrix に適用する議論を，unnested alternating diagram に制限した場合の Seifert matrix で行うと，それに対応する graph として unnested alternating diagram の Seifert graph の dual graph が対応していることがわかりました.

この対応は Alexander matrix の場合の議論と同様，link diagram から初等的な方法で対応する graph を作れるということになります．又，unnested diagram（alternating でない）においても，graph への対応付けのルールが少し煩雑になりますが，diagram から graph を作れると考えています.

この対応により dual graph においても Matrix-tree theorem が使えるということになり，Alexander polynomial の係数の情報を両方から見ることで何かわからないか，ということを最近考えています.

References

[1] R.Bott and J.P.Mayberry, Matrices and trees, *Economic Activity Analysis,O.Morgenstern,Ed.Wiley and Sons, New York.* (1954).

[2] G.Burde and H.Zieschang, *Knots 2nd Edition*,de Gryuyter Studies in Mathematics 5(2003).

[3] R.H.Crowell, Genus of alternating link types, *Ann.of Math.*, **69** (1959), 258–275.

[4] R.Hartley, On two-bridged knot polynomials, *J.Austral.Math.Soc.*, **28** (1979), 241–249.

[5] K.Murasugi, On the alexander polynomial of alternating algebraic knots, *J.Austral.Math.Soc.(Series A)*, **39** (1985), 317–333.

大阪市立大学大学院理学研究科前期博士課程数物系専攻２年

E-mail address: chong @ sci.osaka-cu.ac.jp