E_6, E_7 ルート系と種数 3 の compact Riemann 面の関係。

東京大学数理科学研究科修士課程 2 年　久野雄介

よく出てくる記号：$\mathbb{M}_g(/\mathbb{H}_g)$ で種数 g の compact Riemann 面 (/超楕円的 compact Riemann 面) の moduli 空間 (双正則同値類全体) をあらわす。

この拙文では E_6, E_7 ルート系と種数 3 の compact Riemann 面との関係について説明したいと思う。種数 3 の非超楕円的 compact Riemann 面 C は、標準埋め込み

$$C \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(C;K)^\vee)$$

(K は C の標準束) により射影空間の中の平面 4 次曲線と見ることができる。逆に平面 4 次曲線 C はもちろん種数 3 の compact Riemann 面であるが、射影空間への包含により同語反復束の双対を引き戻すと、添加公式によってそれが C の標準束を与えていることが分かる。つまり、種数 3 の非超楕円的 compact Riemann 面とは平面 4 次曲線に他ならない。そこで、この見方で平面 4 次曲線を考察し、$\mathbb{M}_3 \backslash \mathbb{H}_3$ について調べたいと思う。当面の目標は、ファイバーに種数 3 の非超楕円的 compact Riemann 面の構造が入っているような曲面束の第一特性類、殆ど同じものとして符号数、その局所化の状況などである。なぜ 3 か？というと、種数 2 以下の compact Riemann 面は全て超楕円的であって、よく調べられているからである。この話を 3 より大きい g(または 4 より大きい d) についてどう考えていけばよいのか、今後の課題になる。

平面 4 次曲線について述べる前にルート系について記しておく。V を Euclid 空間、$\Phi \subset V$ をルート系とする。Φ の Weyl 群を $W \subset O(V)$ とする。ルート系の話で基本的なのは次の定理である。

Theorem 0.1 (Chevalley). *S(V)* で V 上の多項式代数を表し、その W-不変部分代数を $S(V)^W$ とかくことにすると、

$$S(V)^W \cong \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

n は V の次元。x_i 達は斉次多項式で、代数的に独立。$x_1, \ldots, x_n$ を *basic invariants* と呼ぶ。

全てを複素化しても定理が成り立つ。複素の場合には basic invariants を用いて、同相

$$\Psi : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}/W \to \mathbb{C}^n, [v] \mapsto (x_1(v), \ldots, x_n(v))$$

が成り立つ。

この同相の左側を詳しく見よう。一つ単純ルートの集合を固定し、Π で表す。Π を決めれば正ルートの集合 Φ^+ が定まる。$\Pi \subset \Phi^+ \subset \Phi$ である。$\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Phi^+}$ をその鏡映面全体の集合とする。$V \backslash \{H_\alpha\}_{\alpha\in\Phi^+}$ は不連結で、その一つ一つは部屋と呼ばれ可縮である。しかし全てを複素化して W の作用で割り、$X = (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \backslash \bigcup_{\alpha\in\Phi^+}(H_\alpha \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))/W$ を考えると次の定理が成り立つ。

Theorem 0.2 (Brieskorn).

$$\pi_1(X) = < a_1, \ldots, a_n \mid \overbrace{a_i a_j \ldots}^{h_{ij}} = \overbrace{a_j a_i \ldots}^{h_{ij}} >$$

ここで、$a_1, \ldots, a_n$ は Π の元と一対一に対応している。h_{ij} は、$a_i a_j$ を W の元と見た時の、$a_i a_j$ の位数である。このような表示で定義される群は *Artin* 群と呼ばれている。X についてはもっと強く、$K(\pi, 1)$ 空間であることが知られている。

さて E_6, E_7 ルート系と平面 4 次曲線を関係つけていこう。ルート系が A,D,E 型の時に、右側に注目すると、対応する特異点の半普遍変形と呼ばれるものと対応することが知られている。。x, y の 2 変数多項式 f を A 型、D 型、E 型と呼ばれるもののいずれかとする。f は原点で孤立特異点を持つが、その特異点の変形をすべて含んでいるようなものとして、半普遍変形空間と呼ばれるものがある。これは具体的に書くことができ、ものとしては $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^n$ 内の、重み付き同次多項式 $F(x, y, a)$ により $F = 0$ で定義される解析的集合 Ω と、その $\mathbb{C}^n$ への射影

$$\pi : \Omega \to \mathbb{C}^n$$

の組で、$F(x, y, 0) = f(x, y)$ となっているものである。F の具体的な形は例えば E_7 だったら

$$\begin{aligned} \Omega = \{(x, y \quad &, \quad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \mid \\ F(x, y, a) \quad &= \quad x^3y + y^3 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3xy + a_4x^2 + a_5y + a_6x + a_7 = 0\} \end{aligned}$$

である。a のパラメータの次元が、対応するルート系 E_7 の basic invariants の個数に対応していることに注意する。実際、これは任意の A,D,E 型について成立する。さて、basic invariants を

$$degx_1 \leq \ldots \leq degx_n$$

となるようにして $\Psi : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}/W \to \mathbb{C}^n$ を作る。$\pi : \Omega \to \mathbb{C}^n$ を半普遍変形とすると、次が成り立つ。

Theorem 0.3 (Brieskorn). $a \in \mathbb{C}^n$ について、

$$\pi^{-1}(a) \text{ が } smooth \Longleftrightarrow \Psi^{-1}(a) \in (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \backslash \bigcup_{\alpha \in \Phi^+} (H_\alpha \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))/W$$

半普遍変形 $\pi : \Omega \to \mathbb{C}^n$ は、ファイバーを一斉に compact 化できる。よって、この定理により π を、ファイバーが smooth なところに制限してやれば、それは底空間の基本群が Artin 群であるような平面曲線の族ができる。E_6, E_7 の時は平面 4 次曲線の族である。E_6 は、無限遠直線と 4 重に交わるような曲線の族、E_7 は無限遠直線と 3 重に交わるような曲線の族である。

ここからは、今考えていることを少し紹介する。$\mathbb{M}_3 \backslash \mathbb{H}_3$ の orbifold 基本群に対応する群 G を、4 次曲線の方の言葉で構成した。構成を簡単に述べよう。4 次同次多項式 (modulo 定数倍) で、非特異曲線を定めるもの全体 $\mathcal{Q}$ を考える。これの $PGL(3)$ による商が $\mathbb{M}_3 \backslash \mathbb{H}_3$ と集合論的に一対一に対応するのであるが、素直に割らずに、$PGL(3)$ による homotopy 商を取る。この空間 $\mathcal{Q}_{PGL(3)}$ の基本群が今考えたい G である。$\mathcal{Q}_{PGL(3)}$ の上に 4 次曲線の族が乗っていて、そのモノドロミーを考えることによって G から種数 3 写像類群 Γ_3 へ準同型が存在する。これの誘導するコホモロジーの間の写像の特に 2 次の部分

$$H^2(\Gamma_3; \mathbb{Q}) \to H^2(G; \mathbb{Q})$$

を目下調べている。その際、先の E_6, E_7 の半普遍変形の空間を通して、Artin 群が関係してくる状況になっている。新人 Seminar では、なぜ G という群を考えたいのかということをお話させて頂ければと思う。

2006 年度　トポロジー新人セミナー