Mapping Class Group

門田直之
大阪大学大学院理学研究科博士前期過程 1 年

現在読んでいる本は Joan S. Birman 著『Braids, Links, and Mapping Class Groups』です。進めている内容を簡単にですが紹介します。

定義

・T_g: genus g の向きつけ可能な閉曲面
・$z_1^0, \cdots, z_n^0$: n を固定した T_g の適当に選ばれた点
・$\mathcal{F}_n T_g$: 各 i に対して $h(z_i^0) = z_i^0$ となるような向きを保つ同相写像 $h : T_g \to T_g$ の群
・$\mathcal{B}_n T_g$: $h(\{z_1^0, \cdots, z_n^0\}) = \{z_1^0, \cdots, z_n^0\}$ となるような向きを保つ同相写像 $h : T_g \to T_g$ の群
・$\pi_0(\mathcal{F}_n T_g, id)$:$\mathcal{F}_n T_g$ の弧状連結成分の群で、T_g の the pure mapping class group と呼ぶ。
・$\pi_0(\mathcal{B}_n T_g, id)$:$\mathcal{B}_n T_g$ の弧状連結成分の群で、T_g の the (full) mapping class group と呼び、$M(g,n)$ という記号も使う。

ここでは、特別な場合 $g = 0$ のときの mapping class group、つまり S^2 の mapping class group がどうなっているのかを紹介します。

定理

$n \geq 2$ のとき $M(0,n) = \pi_0 \mathcal{B}_n S^2$ は generator が $\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}$ で defining relation が、

$$
\begin{aligned}
&\omega_i \omega_j = \omega_j \omega_i && |i-j| \geq 2 \\
&\omega_i \omega_{i+1} \omega_i = \omega_{i+1} \omega_i \omega_{i+1} \\
&\omega_1 \cdots \omega_{n-2} \omega_{n-1}^2 \omega_{n-2} \cdots \omega_1 = 1 \\
&(\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{n-1})^n = 1
\end{aligned}
$$

という、presentation を持つ。

また、$n = 0, 1$ のとき $M(0,n) = 1$ となる。