Note on the homotopy $L_2T(m)/(v_1)$

名前：中野太輔　　所属：高知大学大学院理学研究科（$M2$）

今私は安定ホモトピー論を勉強している。ここでの大きな目標の一つとして、各 p で局所化した球面 $S^0_{(p)}$ の安定ホモトピー群 $\pi_*(S^0_{(p)})$ を求めることがある（ただし、p は素数であり、今後 $S^0_{(p)} = S^0$ と書く）。しかし、$\pi_*(S^0)$ をもとめることは難しい。そこで Bousfield-Ravenel localization functor L_n を導入し、Hopkins-Ravenel の定理により、ホモトピー群 $\pi_*(L_nS^0)$ を求めればよいことまで集約できる。ここで以下、$\pi_*(L_nS^0)$ に関してわかっていることを紹介する。

（$\pi_*(L_nS^0)$ に関してわかっていること）

1. $\pi_*(L_0S^0) = \mathbb{Q}$　(Serre)　(1953)
2. $\pi_*(L_1S^0)$　(Adams, Novikov, Mahowald, Miller-Wilson, Ravenel)　(*cf.* Ravenel 1986)
3. $\pi_*(L_2S^0)\begin{cases} p=3 \text{ のとき下村-王} & (2002) \\ p\geq 5 \text{ のとき下村-矢部} & (1995)\end{cases}$

つまり、$p \geq 3$ で $\pi_*(L_2S^0)$ は分かっている。

$p = 2$ のときは、下村-王により Adams-Novikov spectral sequence の E_2 項は決定されている。　(2002)

しかし、いきなり $\pi_*(L_nS^0)$ を決定することは困難である。そこで、Ravenel によって $S^0 = T(0) \subset T(1) \subset \cdots \subset T(\infty) = BP$ となるように構成された S^0 と BP の中間の環 spectrum $T(m)$ を考え、そのホモトピー群 $\pi_*\big(L_nT(m)\big)$ を求める。ここで以下、$\pi_*\big(L_nT(m)\big)$ に関してわかっていることを紹介する。

（$\pi_*\big(L_nT(m)\big)$ に関してわかっていること）

$\pi_*\Big(L_2V(0)\wedge T(m)\Big)$　(下村-上谷)　(2001)

$p=2,\ \pi_*\Big(L_2T(1)\Big)$ の部分群 $\begin{cases} \text{filtration} \geq 4 & \text{(市木-下村)} \quad (2003) \\ \text{filtration} = 0 & \text{(市木-下村-王)} \quad \text{(preprint)}\end{cases}$

$\pi_*\Big(L_nV(n-1)\wedge T(m)\Big)\begin{cases} n\leq m+1, p>2 \\ \quad\text{または} \\ n<m+1, p=2\end{cases}$ のとき　(Ravenel)　(1986)

$H^0M^1_2\big(T(m)\big)$　(市木-中井-Ravenel, 下村)　(2002)

$\pi_*\Big(L_nV(n-2)\wedge T(m)\Big)$　$n^2 < 2p-1,\ m \geq n^2-n-1$ のとき　(下村)　(2002)

現在、論文にまとめているのが、$p > 2$ かつ $m \geq 2$ のホモトピー群 $\pi_*\Big(L_2T(m)/(v_1)\Big)$ の決定である（投稿予定）。さらに今後の研究課題としては、上記の結果を参考にして、$p > 5$ かつ $m \geq 3$ の $\pi_*\Big(L_3T(m)/(v_1, v_2)\Big)$ の決定を考えている。