擬群構造とその組の変形理論

野沢 啓

Abstract. この文書では、多様体上の擬群構造とその組の変形理論について紹介する。

Contents

1. 序

私は C^0 多様体上に C^∞ 局所座標系で与えられる複素構造、葉層構造、(G,X) 構造等の様々な幾何構造（擬群構造）とその多様体の位相的性質の関わりに興味を持っている．修士課程においては、compact 多様体上の擬群構造の摂動について調べるための擬群構造の変形理論と呼ばれる理論の組バージョンへの改良について研究を行った．この文書の主定理はその際得た倉西族と呼ばれる族の存在定理である．

擬群構造という定式化は現在ではあまり明記的に用いられていないため、その変形理論の紹介に当たりいくらかの補足が必要であるように思われた．そこで、第 2 節では擬群構造についてこれまでに行われてきた研究についてまとめた．第 3 節で擬群構造の組の変形理論とその倉西族の存在定理について述べた．

2. 擬群構造について

2.1. 擬群構造の紹介. C^0 多様体上の擬群構造とは凡そ特別な C^∞ 局所座標系で与えられる C^0 多様体上の構造であり、1958 年に Haefliger によって定式化されたものである．以下にその例となる幾何構造を挙げる.（定義は後の小節 3.2. を参照.）

Example 2.1. 葉層構造, symplectic 構造, 接触構造, Engel 構造.

Example 2.2. 複素構造, 横断的に複素解析的な葉層構造, $\{e\}$ 構造, affine 構造, 平坦共形構造, 射影構造, 双曲的構造, (G,X) 構造.

Date: 13/7/2006.

Remark 2.3. 後に述べるように、(G,X) 構造は $\{e\}$ 構造, affine 構造, 共形平坦構造, 射影構造, 双曲的構造を含むような広い幾何構造である．上に挙げたものの多くは複素解析的バージョンが考えられている．擬群構造により、多くの幾何構造が定式化できる．Riemann 計量, 概複素構造, 接続などの多様体上の fiber 束の切断を用いて定義される幾何構造も (しばしば non-Hausdorff であるが) 多様体上の層のÉtale 空間を用いると擬群構造と思うことができる．

擬群構造という枠組みは広範すぎて、一般の擬群構造に対して言えることはあまりない．また、具体的な計算の道具としても優れているとは言えない．このことが、それぞれの幾何における固有の現象が探られている現在において擬群構造があまり用いられない理由であろう．ただ、擬群構造一般を扱いうる理論ができれば、それはとても見通しの良いものとなる．主な例としては以下の 2 つが挙げられるであろう．

(i) 擬群の元の芽全体がなす位相亜群（3.1. 参照）の分類空間の擬群構造への応用.
(ii) 小平-Spencer 理論と同様の定式化による擬群構造の変形理論.

以下、これらについて述べる．

2.2. **擬群構造の分類空間.** 上の (i) は Haefliger によって観察されたものである．擬群の元の芽全体の集合は位相亜群になるが (3.1. 参照)、その位相亜群に値をとる 1-cohomology class は擬群構造の前身と考えられる。このとき、基点付き CW 複体に対して位相亜群に値をとる 1-cohomology class の homotopy 類の集合を与える関手が（Brown 関手になり Brown の定理によって）表現可能になる．この関手を表現する分類空間は位相亜群の分類空間といわれ、これを用いて Haefliger の開多様体上の葉層構造の分類定理、それに続く Thurston の閉多様体上の葉層構造の分類定理という鮮やかな結果が生み出された．また、開多様体上の複素構造に関する足立の研究がある.（これらの研究については足立 [1] の第 5 章と第 6 章を参照.）

2.3. **擬群構造の変形理論について.** 幾何構造の変形理論とは、多様体上に一つ幾何構造があるときにその摂動について調べる理論である．C^0 多様体上の複素構造の変形理論である小平-Spencer 理論が 1958 年に小平と Spencer により創始されたのが変形理論の始まりであった．この小平-Spencer 理論で用いられた幾何構造の変形の定式化は擬群構造に対してもそのまま通用するものであり、擬群構造の変形理論の研究が始められた．

小平-Spencer 理論の一つの大きな帰結は倉西による倉西族（他にも普遍族、半普遍族、完備族等の似た普遍性を持つ変形の族がある.）と呼ばれる変形の族の構成である．ここで倉西族とは凡そ一つ固定した compact 多様体とその上の複素構造に対し定義されるその変形の族で、その十分近い変形を全て含むようなものである．擬群構造の変形理論においても、楕円型擬群構造と呼ばれる十分固い擬群構造に対しては倉西族が構成できることが主に Spencer,Malgrange,Goldschmidt,Moolgavkar によって示された.（[6] を参照.）

この段落ではこの仕事の内容について少し細かく述べる．複素構造の変形理論で倉西族に構成に用いられたのは、正則ベクトル場の Dolbeault 複体と概複素構造の可積分性の条件を与える Newlander-Nirenberg の定理だった．擬群構造に対しても正則ベクトル場の Dolbeault 複体の対応物（線形 Spencer 複体）と Newlander-Nirenberg の定理に対応物（非線形 Spencer 複体）は Spencer によって定式化され、Goldschmidt によって楕円型擬群構造に対する線形 Spencer 複体の完全性が示された．擬群構造の変形理論の構築において一番困難だったのは、複素構造の場合の Newlander-Nirenberg の定理に相当する定理であった．このために C^∞ 多様体のベクトル場の層の部分層の jet 束の構造の精密な理解を要し、Lie 方程式論と呼ばれる理論が作られた．Lie 方程式とは多様体の接束の jet 層の部分層（多様体上の線形微分方程式）であって、ベクトル場の Lie bracket から jet 層に導かれる Lie bracket に関して閉じているものである．擬群構造を持つ多様体に対して複素多様体上の正則ベクトル場に対応する特別なベクトル場が考えられるが、このベクトル場を定義する線形微分方程式が Lie 方程式になっている楕円型擬群構造に対しては複素構造の場合の Newlander-Nirenberg の定理に対応する定理が擬群構造に対して成立することが Malgrange によって示された．これを用いて、Moolgavkar[6] によって楕円型擬群構造の倉西族が構成された.（この段落に述べた研究については [6],[5],[3] やその参考文献を参照.）

以下で述べる擬群構造の組の変形理論とも関わる、擬群構造の変形理論のその後の応用について述べる．複素構造の変形理論が複素構造の moduli 空間の構成など様々な場面で応用されたのに比べ

正確な条件については小節 3.6. 及び 3.7. を参照のこと.

て、擬群構造の変形理論のその後殆ど応用されていない．複素構造以外の楕円型擬群構造を持つ多様体の興味深い例が当時は殆ど知られていなかったのが原因ではないかと思われる．

現在は、共形平坦構造、射影構造、複素 symplectic 構造、複素接触構造などいくつかの例が研究されている．擬群構造の変形理論を用い、特にいまだ分かっていないことが多くあるこれらの構造の moduli 空間の性質を調べられるのではないだろうか．

最後に、共形平坦構造や射影構造は (G,X) 構造と言われるものの一種であり、これらの moduli 空間は多様体の基本群から Lie 群 G への準同型の空間によっても考えることができ、その方向から様々な研究が行われていることを述べておく．([4],[8] 等を参照．)

3. 擬群構造の組の変形理論

この節では擬群、擬群構造、その組、その変形の定義を述べてから倉西族の存在定理を述べる．ここで述べることは、第 2 節で述べた理由から、擬群構造の変形理論の境界付き多様体上の擬群構造の場合への拡張や擬群構造を持つ多様体とその部分多様体の変形との関係を捉えるために考えたものである．

3.1. **擬群の定義.**

まず、m 次元 C^∞ 多様体 X 上の擬群（pseudogroup）を定義する．X の開集合全体の集合を $\mathcal{O}(X)$ で表す．

Definition 3.1. X の開集合から開集合への微分同相 [resp. 同相] を X の局所微分同相 [resp. 局所同相] という．X の局所微分同相全体の集合を $\mathcal{D}^\infty(X)$ で表し、X の局所微分同相からなる標準的な擬群という．もし、$\mathcal{G} \subset \mathcal{D}^\infty(X)$ が次の条件を満たすならば $\mathcal{G}$ を X 上の擬群 (a pseudogroup on X) という．但し、局所微分同相 $f : U \longrightarrow V$ を (U,f,V) で表した．

(i) $(X, \mathrm{id}_X, X) \in \mathcal{G}$.
(ii) $(U,f,V) \in \mathcal{G}, W \in \mathcal{O}(X), W \subset U$ ならば $(W, f|_W, f(W)) \in \mathcal{G}$.
(iii) $(U,f,V),(U',f',V') \in \mathcal{G}, V \subset U'$ ならば $(U, f' \circ f, f' \circ f(U)) \in \mathcal{G}$.
(iv) $(U,f,V) \in \mathcal{G}$ ならば $(V, f^{-1}, U) \in \mathcal{G}$.
(v) 任意の $(U,f,V) \in \mathcal{D}^\infty(X)$ に対し、$U_i \in \mathcal{O}(X)$ であって $U = \bigcup_{i\in I} U_i, (U_i, f|_{U_i}, f(U_i)) \in \mathcal{G}$ を満たすものが存在すれば $(U,f,V) \in \mathcal{G}$.

Remark 3.2. 擬群は X 上の点付き集合の前層である．(v) はある種の極大条件であって、(i) から (iv) を満たす $\mathcal{G}$ から標準的に (v) を満たすものを構成できる．擬群の元の各点 $x \in X$ における芽とは、定義域に x を含む局所微分同相全体の集合を、2 つの局所微分同相は x のある開近傍への制限が等しいときに同値とする同値関係で割った集合である。擬群の元の X の各点における芽全体の集合は X を対象とする亜群になる．合成は写像の積である．ここで亜群とは射が全て逆を持つ小圏である．

3.2. **擬群構造の定義と例.**

ここでは C^0 多様体 M 上の $\mathcal{G}$ による擬群構造を定義し、上で述べた Example 2.1. と Example 2.2. について述べる．

Definition 3.3. M の X への C^∞ 局所座標系 $\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ とは 各 ϕ_i が M の開集合 U_i から X の中への局所同相であって、次が満たされるときに言う．

(i) $M = \bigcup_{i\in I} U_i$.
(ii) 任意の $i,j \in I, U_i \cap U_j \neq \emptyset$ に対し, 変換写像が $\phi_i \circ (\phi_j)^{-1}|_{\phi_j(U_i\cap U_j)}$ が $\mathcal{D}^\infty(X)$ に属している．

M の X への C^∞ 局所座標系 $\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ が M 上の $\mathcal{G}$ 構造であるとは、任意の $i,j \in I, U_i \cap U_j \neq \emptyset$ に対し、$\phi_i \circ (\phi_j)^{-1}|_{\phi_j(U_i\cap U_j)} \in \mathcal{G}$ が成り立つときに言う．

擬群構造の局所同型写像を定義しておく．これは複素多様体上の双正則写像に相当する．

Definition 3.4. $\mathcal{U} = \{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ と $\mathcal{V} = \{(V_j,\psi_j)\}_{j\in J}$ を M 上の 2 つの $\mathcal{G}$ 構造とする． M の局所同相 (S,f,W) が $\mathcal{U}$ から $\mathcal{V}$ への局所同型であるとは $i \in I, j \in J$ であって $\phi_i(U_i) \cap S \neq \emptyset, V_j \cap f(S \cap \phi_i(U_i)) \neq \emptyset$ であるものに対して $\psi_j \circ f \circ (\phi_i)^{-1} \in \mathcal{G}$ となるときに言う． もしさらに (S,f,W) が M の同相（つまり $S = W = M$ ）ならば f は $\mathcal{U}$ から $\mathcal{V}$ への同型であると言う． $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は同型で結ばれるときに同型であると言う．

局所同型写像全体は M 上の擬群になる．

Euclid **空間上の擬群による擬群構造**. 複素構造、葉層構造、symplectic 構造、$\{e\}$ 構造、横断的に複素解析的な葉層構造、共形平坦構造は Euclid 空間上の擬群による擬群構造であって、これらを定義する擬群は全て $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ のある部分 Lie 群 G を用いて、$\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) | (df)_x \in G\}$ という形に書ける．但し $(df)_x$ は x における f の Jacobi 行列である．

以下に対応する G を書くと、複素構造は $\mathrm{GL}(\frac{n}{2};\mathbb{C})$,（余次元 r の）葉層構造は $\{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix} A' \in \mathrm{GL}(r;\mathbb{R}), A'' \in \mathrm{GL}(n-r;\mathbb{R})\}$, symplectic 構造は $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$,$\{e\}$ 構造は $\{e\}$,（複素余次元 $\frac{r}{2}$ の）横断的に複素解析的な葉層構造は $\{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix} A' \in \mathrm{GL}(\frac{r}{2};\mathbb{C}), A'' \in \mathrm{GL}(n-r;\mathbb{R})\}$, 共形平坦構造は $\mathrm{CO}(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) | A = \lambda A', A' \in O(n;\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ である．但し、$\mathrm{GL}(\frac{n}{2};\mathbb{C})$ を標準的に $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ の部分 Lie 群と考えている．

affine 構造も Euclid 空間上の擬群による擬群構造であるが、対応する擬群は $\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) | (df)_x$ が局所定数写像 $\}$ となる．

(G,X) **構造**. Lie 群 G が C^∞ 多様体 X に $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{Diff}(X)$ により作用しているとする．このとき $\mathcal{G}_{(G,X)} = \{(U, f, V) \in \mathcal{D}(X) | f = \Phi(g)|_U, g \in G\}$ とおくと、これは X 上の擬群になる．$\mathcal{G}_{(G,X)}$ による擬群構造を (G, X) 構造と言う．

射影構造, 双曲的構造はこの例で、それぞれ $(X, G) = (P^n(\mathbb{R}), \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R}))$, $(X, G) = (D^n, \mathrm{PSL}(n;\mathbb{R}))$ の場合である．$\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$ の $P^n(\mathbb{R})$ への作用は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の直線の集合への自然な作用、$\mathrm{PSL}(n;\mathbb{R})$ の D^n への作用は一次分数変換の拡張である．上述した共形平坦構造も (G, X) 構造として考えるのが一般的である．

3.3. **擬群構造の組の定義.** ここでは擬群構造の組を定義する．複素多様体の複素部分多様体,symplectic 部分多様体の Lagrange 部分多様体, 共形平坦多様体の共形平坦部分多様体などを定式化するものである．

まずは擬群の組を定義する．X, Y を C^∞ 多様体、$\iota : Y \longrightarrow X$ を C^∞ 埋め込みと仮定する．X の境界は ι の像に含まれ、Y は境界を持たないとする．$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ をそれぞれ X, Y 上の擬群とする．後のため $\mathcal{G}$ の元 g に対して $g(\iota(Y)) \subset \iota(Y)$ ならば、$g|_{\iota(Y)}$ は $\mathcal{H}$ に属すると仮定する．ここでの 2 つの仮定は後で必要になるものである．M, N を C^0 多様体とする．

Definition 3.5. M の X への C^∞ 局所座標系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ と N の Y への C^∞ 局所座標系 $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$ と $f : N \longrightarrow M$ が $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ 構造であるとは次が満たされるときに言う．

(i) $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ が M 上の $\mathcal{G}$ 構造である．
(ii) $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$ が N 上の $\mathcal{H}$ 構造である．
(iii) 任意の $j \in J$ に対し, ある $i(j) \in I$ があって

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_j"'] & M \arrow[d, "\varphi_{i(j)}"] \\ Y \arrow[r, "\iota"'] & X \end{tikzcd}$$

が可換になる．

3.4. **擬群構造の組の変形の族の定義.** ここでは擬群構造の変形の小平-Spencer 理論と同様の定式化、つまりパラメータ付けされた C^∞ 局所座標系の族を変形の族と考える方法について述べる．

簡単のため、M, N を compact であると仮定する．変形の定義には compact 性は不要であるが、以下で述べる定理の条件には必要となる．(M, N) 上の $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ 構造 $\mathcal{U}, \mathcal{V}, f$ を一つ固定する．

Definition 3.6. $(B, 0)$ を $\mathbb{R}^K$ の点付き開集合とする．連続写像 $F\colon N \times B \to M \times B$、$M \times B$ の $X \times B$ への C^∞ 局所座標系 $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i\in I}$、$N \times B$ の $Y \times B$ への C^∞ 局所座標系 $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j\in J}$ の組であって以下を満たすものを $\mathcal{U}, \mathcal{V}, f$ の $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ 構造としての変形の C^∞ 族という．

(i) F, Φ_i, Ψ_j は全てファイバーごとの写像である．つまり、$F(N \times \{b\}) \subset M \times \{b\}, \Phi_i(U_i \times \{b\}) \subset M \times \{b\}, \Phi_j(V_j \times \{b\}) \subset N \times \{b\}$ が成り立つ．
(ii) $\{(U_i \cap (M \times \{b\}), \Phi_i|_{M\times\{b\}})\}_{i\in I}$ は $M \times \{b\}$ 上の $\mathcal{G}$ 構造であり、$\{(V_j \cap (N \times \{b\}), \Psi_j|_{N\times\{b\}})\}_{j\in J}$ は $N \times \{b\}$ 上の $\mathcal{H}$ 構造である．

(iii) 任意の $j \in J$ に対し, $i(j) \in I$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{F} & U_{i(j)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_j} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{i(j)}} \\ Y \times B & \xrightarrow[\iota \times \mathrm{id}_{\mathcal{R}^K}]{} & X \times B \end{array}$$

が可換になる.

(iv) 以上により各ファイバーに $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ 構造が定義されるが、B の基点 0 上のファイバーでは $\mathcal{U}, \mathcal{V}, f$ になっている.

Remark 3.7. ここでは簡単のため、パラメータ空間を Euclid 空間の点付き開集合として定義したが、倉西族を構成するためにはより一般に点付き実解析的集合をパラメータ空間とする変形の族を考える必要がある.

3.5. **倉西族の定義.** ここでは倉西族の定義を述べる. まず、2 つの変形の族の間の射を定義する.

Definition 3.8. F_1, F_2 をそれぞれ B_1, B_2 上の $\mathcal{U}$ の変形の族とする. $(\tilde{h}_M, \tilde{h}_N, h)$ が F_1 から F_2 への射であるとは次のときに言う.

(i) h は基点を保つ C^∞ 写像 $h\colon (B_1', 0) \longrightarrow (B_2', 0)$ である. 但し、B_1' と B_2' はそれぞれ B_1' と B_2' における 0 の開近傍である.

(ii) $\tilde{h}_N$ と $\tilde{h}_M$ は h 上の C^∞ バンドル写像 $\tilde{h}_N\colon N \times B_1' \longrightarrow N \times B_2'$, $\tilde{h}_M\colon M \times B_1' \longrightarrow M \times B_2'$ である.

(iii) 図式

$$\begin{array}{ccc} N \times B_1' & \xrightarrow{F_1} & M \times B_1' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{h}_N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{h}_M} \\ N \times B_2' & \xrightarrow[F_2]{} & M \times B_2' \end{array}$$

は可換になる.

(iv) $\tilde{h}_M$ と $\tilde{h}_N$ の各ファイバーへの制限は $\mathcal{G}$ 構造及び $\mathcal{H}$ 構造の同型になる.

Definition 3.9. F_0 を B_0 上の $\mathcal{U}$ の変形の族とする. F_0 が $\mathcal{U}$ の変形の倉西族または完備族 (complete family) であるとは任意の パラメータ空間 $(C, 0)$ 上の任意の $\mathcal{U}$ の変形の族 F に対し, 基点を保つ C^∞ 写像 $h\colon (C, 0) \longrightarrow (B, 0)$ であって $F = h^* F_0$ を満たすものが存在するときに言う. もしさらに h が唯一であれば, F_0 は $\mathcal{U}$ の変形の普遍族（universal family）であると言う.

Remark 3.10. h の基点における微分写像まで唯一であるときには F_0 は versal family, 半普遍族（semi-universal family）であるという.

3.6. **擬群に関する条件.** ここでは次の小節で述べる倉西族の存在定理の条件となる擬群の条件について述べる.

X を C^∞ 多様体とし、$\mathcal{G}$ を X 上の擬群とする. Q_k を M の局所微分同相の k-jet がなす集合とする. Q_k は自然に C^∞ 多様体になる.

Definition 3.11. 擬群 $\mathcal{G}$ が平滑である (smooth) とは $\bigcup\{\, j_{kx}(f) \mid f \in \mathcal{G}, f(x) = x \,\}$ が Lie 群であり、任意の $k \geq 0$ と $x \in X$ に対して $\bigcup_{f \in \mathcal{G}} j_{kx}(f)$ が $Q_k(X)$ の C^∞ 部分多様体であるときに言う.

Definition 3.12. 平滑な擬群 $\mathcal{G}$ が有限階数である (of finite rank) とはある $k \geq 0$ と $Q_k(X)$ の C^∞ 部分多様体 P_k であって $f \in \mathcal{D}^\infty(X), f \in \mathcal{G}$ と $j_{kx}(f) \in P_{kx}$ が $x \in X$ に対して同値になるものが存在するときに言う. 上の条件を満たす k の内、最小のものを $\mathcal{G}$ の階数という.

平滑な擬群 $\mathcal{G}$ に対し、C^0 多様体 M 上の $\mathcal{G}$ 構造 $\mathcal{U}$ があるとする. 擬群構造を持つ多様体は擬群構造が C^∞ 局所座標系であるので C^∞ 構造を持つことに注意する.

Definition 3.13. M の開集合上で定義された C^∞ ベクトル場 V が （$\mathcal{U}$ の）$\mathcal{G}$ ベクトル場であるとは、ある $\epsilon > 0$ があって V によって導かれる局所微分同相の 1 径数族 $\{\exp tV\}$ の元 $\exp tV$ が $|t| < \epsilon$ に対して $\mathcal{U}$ の局所同型となっているときに言う.

$J_k(TX)$ を TX の k-jet 束とする.

Definition 3.14. $\mathcal{G}$ を平滑な階数 k の擬群とする. $J_k(TX)$ の部分集合 R_k を $\mathcal{G}$-ベクトル場の k-jet 全体からなるものと定義すると、これは部分ベクトル束になる. もし $J_k(TX)$ の 0-jet をとる射影の R_k への制限 $\pi_0 \colon R_k \longrightarrow TX$ が全射ならば, $\mathcal{G}$ は形式的に推移的である（formally transitive）という.

これは分かりにくい条件であるが、次が満たされるときには満たされる.

Definition 3.15. $\mathcal{G}$ が推移的（transitive）とは、任意の $x, y \in X$ に対してある $g\ in \mathcal{G}$ があって $g(x) = y$ となるときに言う.

Definition 3.16. $\mathcal{G}$ を平滑な階数 k の形式的に推移的な擬群とする. $x \in X$ を一つ取る. Lie 群 $\bigcup\{ j_{kx}(f) \,|\, f \in \mathcal{G}, f(x) = x \}$ の Lie 代数 g_k は $\mathcal{G}$ の x における線形等方代数 (linear isotropy algebra) という.

x, y が X の同じ連結成分に属するとき、それぞれにおける $\mathcal{G}$ の等方線形代数は $\mathcal{G}$ の形式的推移性から同型になることに注意する.

Definition 3.17. $\mathcal{G}$ の線形等方代数は y を P_{kx} の 点として $\mathrm{GL}(T_y P_k)$ の部分群と見なせる. もし $l \geq 0$ であって g_l が行列としての階数が 1 であるような元を含まないとき, $\mathcal{G}$ は楕円型（elliptic）であるという.

楕円型擬群はある程度固いものであることが以下から分かる.

Theorem 3.18 (Guillemin-Sternberg [3])**.** $\mathcal{G}$ を平滑な有限階数の推移的な楕円型擬群とする. このとき $\mathcal{G}$ の任意の元は X の C^∞ 構造から唯一定まるその C^ω 構造に関して C^ω 局所微分同相になる.

3.7. **倉西族の存在定理.** 擬群構造の組の変形について、倉西族の存在定理を述べる. これは [6] における楕円型擬群構造の変形の倉西族の存在定理を組バージョンにしたものになっている.

X, Y を C^∞ 多様体、ι を C^∞ 埋め込み $\iota : Y \longrightarrow X$ とする. X の境界は ι の像に含まれているとする. $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ をそれぞれ X, Y 上の平滑で形式的に推移的な楕円型擬群で有限階数であるものとする. $\mathcal{G}$ の元 g に対して $g(\iota(Y)) \subset \iota(Y)$ ならば、$g|_{\iota(Y)}$ は $\mathcal{H}$ に属すると仮定する.

M, N を compact な C^0 多様体、f を連続写像 $f \colon N \longrightarrow M$ であって、 $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ 構造 $\mathcal{U}, \mathcal{V}, f$ を持つものとする. $\Theta_{\mathcal{G}}$ [resp. $\Theta_{\mathcal{H}}$] を M 上の $\mathcal{G}$ ベクトル場 [resp.N 上の $\mathcal{H}$ ベクトル場] の芽の層とする.

Theorem 3.19 ([7])**.** $\mathcal{U}, \mathcal{V}, f$ の $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ としての変形の族であって $H^1(M; \Theta_{\mathcal{G}}) \times H^1(N; \Theta_{\mathcal{H}})$ の実解析的集合 S を parameter 空間に持つものが存在する. もしさらに $\dim H^0(M_s; \Theta_{\mathcal{G}s})$ と $\dim H^0(M_s; \Theta_{\mathcal{H}s})$ が S の 0 の近傍において定数である場合, この族は普遍族になる. 但し M_s [resp. N_s] は $M \times S$ [resp. $N \times S$] の $s \in S$ 上のファイバーであり、$\Theta_{\mathcal{G}s}$ [resp. $\Theta_{\mathcal{H}s}$] は M_s [resp. N_s] 上の $\mathcal{G}$ ベクトル場 [resp. $\mathcal{H}$ ベクトル場] の層である.

Remark 3.20. 定理の仮定のもとで f は M, N が擬群構造により持つ C^∞ 構造に関して C^∞ はめ込みになる. この仮定は以下に述べるように必要である. また、定理の仮定の下で、$\Theta_{\mathcal{G}}, \Theta_{\mathcal{H}}$ の cohomology は有限次元になる. S は $\Theta_{\mathcal{G}}, \Theta_{\mathcal{H}}$ が持つ Nijenhaus bracket と呼ばれる bracket と f により cohomology の間に導かれる写像により書かれる.

証明について簡単に述べる. まず小節 2.3. で述べたように擬群構造の変形理論の基本的道具である線形及び非線形 Spencer 複体を、それらの相対版 [2] と $f : N \longrightarrow M$ が C^∞ はめ込みであるという仮定を用い、今の状況に適応できるように変形した. 更に、全ての擬群構造の組の同型類が像が f に等しい代表元を持つことから、これらの 2 つの Spencer 複体を使って倉西族を構成できることが分かった.

3.8. **例について.** 上述した中で定理の $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ の条件を満たすような擬群構造は、複素解析的な圏に入るものの他に共形平坦構造、射影構造、affine 構造、$\{e\}$ 構造などがある.

References

[1] 足立正久, 埋め込みとはめ込み, 岩波書店, 1984.
[2] Goldschmidt, H., Spencer, D.C., Submanifolds and over-determined differential operators, *Complex analysis and algebraic geometry*, (1977) 319–356.
[3] Guillemin, V. W., Sternberg, S., Deformation theory of pseudogroup structures, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, No. 64, (1966), 1-80.
[4] Johnson, D., Millson, J.J., Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, *Discrete groups in geometry and analysis* (New Haven, Conn., 1984), 48–106, Progr. Math., **67**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.
[5] Malgrange, B., Équations de Lie. I, II. *J. differential Geometry*, **6** (1972), 503-522; **7** (1972), 117-141.
[6] Moolgavkar, S.H., On the existence of a universal germ of deformations for elliptic pseudogroup structures on compact manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **212** (1975), 173–197.
[7] Nozawa, H., A Kuranishi family of deformation of pseudogroup structures on manifolds along immersd manifolds, 平成 17 年度東京大学修士論文.
[8] Ue, M, On the Deformation of the Geometric Structures on the Seifert 4-Manifolds, *Advanced Studies in Pure Math.*, **20**, Aspects of Low Dimensional Manifolds, Kinokuniya, Tokyo, (1992) 331-363.

東京大学大学院数理科学研究科博士課程 1 年
E-mail address: nozawa@ms.u-tokyo.ac.jp