量子不変量に関して

竹田宏紀*(京都大学大学院理学研究科数理解析系 M1)

2006 年 8 月

この小文において、量子群から結び目の不変量がどのように与えられるかを説明する。

1 Ribbon Hopf 代数と量子群

Ribbon Hopf 代数とは、Hopf 代数で特別な元 R,v をもつもののことである。結び目の不変量を Ribbon Hopf 代数の元として与えることが出来て、表現を与えることでその不変量がローラン多項式などの具体的なものとして定まる。以下の量子群は Ribbon Hopf 代数の典型例である。

定義

$q \in \mathbb{C}$ を 1 の冪根でないと仮定する。generic な量子群 $U_q(sl_2)$ とは、生成元が E, F, K, K^{-1} であり、以下の関係式を満たす $\mathbb{C}$ 上の代数のことである。

$$K \cdot K^{-1} = K^{-1} \cdot K = 1 \tag{1}$$

$$KE = qEK,\ KF = q^{-1}FK \tag{2}$$

$$EF - FE = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^{-1}(K - K^{-1}) \tag{3}$$

($q \to 1$ を形式的に考えると、sl_2 の普遍包絡代数 $U(sl_2)$ が現れるため、量子群 $U_q(sl_2)$ は $U(sl_2)$ を複素変数 q で摂動した対象と考えることが出来る。)

定理

$U_q(sl_2)$ に冪級数環の位相を入れて完備化を行う。すると、$q^{H/2} = K$ なる H が存在し、これに対して

$$R = q^{\frac{H \otimes H}{4}} exp_q((q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})E \otimes F) \tag{4}$$

$$v = q^{-\frac{H2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(3n+1)}{4}} \frac{(q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}})^n}{[n]!} F^n K^{-n-1} E^n \tag{5}$$

とおく。ここで $[n]! = [n][n-1]\cdots[1]$ で $[n] = \dfrac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$ とする。(量子整数) これに、うまく Hopf 代数の構造を入れる (文献 [1]) と、$(U_q(sl_2), R, v)$ は Ribbon Hopf 代数となる。

* Email:takeda@kurims.kyoto-u.ac.jp

2　量子群から Jones 多項式を導出する

以下では、量子群の 2 次元表現の場合を説明する。まず、次の写像を拡張して表現 $\rho : U_q(sl_2) \to \mathbb{C}^2$ を定める。

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & [1] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [1] & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(K) = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

そして、(4),(5) の R, v を計算して、$u = (id \otimes S)R$ とおく。(S は Hopf 代数の対合射) ここで、

$$\mathcal{R} = q^{-3/4} R|_{q=t^{-1}} = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{1/2} - t^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}, \quad h = \rho(uv^{-1})|_{q=t^{-1}} = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

とおく。

さて、任意の絡み目 L を考える。L が閉包 $\hat{b}$ で表される組み紐 b を、組み紐群の標準的な生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ を用いて表す。

次に、$\psi_n(\sigma_i) = (id_{\mathbb{C}^2})^{\otimes(i-1)} \otimes \mathcal{R} \otimes (id_{\mathbb{C}^2})^{\otimes(n-i-1)}$ と ψ_n を定義する。すると、

$$trace(h^{\otimes n} \cdot \psi_n(b)) \tag{8}$$

は isotopy に拠らない不変量となる。さらに、skein 関係式を確かめることにより、この多項式は Jones 多項式に等しいことが分かる。

量子群は量子逆散乱法を起源とし、代数的に豊富な構造をもつ。一方、結び目の不変量は配置空間積分など多彩な不変量をもつ。量子群という抽象的な対象と結び目という具体的で身近な対象を比較しつつ、更なる発展を現在考えている。

参考文献
[1] T.Ohtsuki, *Quantum Invariants*, World Scientific 2002