Abstract

共形 Killing テンソルとその周辺

— テンソル解析を主道具として.

Killing tensor u は

$$\nabla_{i_0} u_{i_1\cdots i_p} + \nabla_{i_1} u_{i_0\cdots i_p} = 0$$

を満す p 次形式と定義されたもので, それに関して種々の事柄が知られている。

共形 Killing vector の拡張としての共形 Killing tensor: $u \in \Lambda^p$ s.t.,

$$\begin{aligned}&\nabla_{i_0} u_{i_1\cdots i_p} + \nabla_{i_1} u_{i_0\cdots i_p} \\ &\qquad = 2\rho_{i_2\cdots i_p} g_{i_0 i_1} - \textstyle\sum_{k=2} (-1)^k (\rho_{i_1\cdots \hat{i_k} \cdots i_p} g_{i_0 i_k} + \rho_{i_0 i_2 \cdots \hat{i_k} \cdots i_p} g_{i_1 i_k})\end{aligned}$$

についても同様に, それが '充分沢山' 存在する空間 (曲率の性質), それを許容しない空間, 等が考察される。

ここでは, 共形 Killing tensor の定義の背景や種々の性質の証明, それに関連する諸結果などを通して, テンソル解析の有用性を示す。更にこの方向から導入された幾つかの微分形式のクラスを紹介する。

p 次形式に関する式:

$$\begin{aligned}&p\,\nabla_a \nabla_b u_{i_1\cdots i_p} + \textstyle\sum_{k=1} R_{i_k b a}{}^{r} u_{i_1\cdots r \cdots i_p} + \textstyle\sum_{k<h} R_{i_k i_h a}{}^{r}\, u_{i_1\cdots b \cdots r \cdots i_p} \\ &\quad + p \textstyle\sum_{k=1} (-1)^k \tau_{a i_1 \cdots \hat{i_k} \cdots i_p} g_{i_k b} + \textstyle\sum_{k=1} (-1)^k \tau_{b i_1 \cdots \hat{i_k} \cdots i_p} g_{i_k a} \\ &\quad - \textstyle\sum_{h \neq k} (-1)^k \tau_{i_h i_1 \cdots \hat{i_k} \cdots b \cdots i_p} g_{i_k a} - \textstyle\sum_{k=1} (-1)^k \tau_{a_k\, i_1 \cdots \hat{i_k} \cdots i_p} g_{ba} = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{但し,}\ \ \tau := \nabla\rho = \tfrac{-\nabla\,\delta u}{n-p+1}\ ),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&p\,\nabla^r \nabla_r u_{i_1\cdots i_p} + \textstyle\sum_{k=1} R_{i_k}{}^{r} u_{i_1\cdots r \cdots i_p} + \textstyle\sum_{k<h} R_{i_k i_h}{}^{sr}\, u_{i_1\cdots s \cdots r \cdots i_p} \\ &\qquad\qquad + (n-2p)(d\rho)_{i_1\cdots i_p} = 0\end{aligned}$$

$$(\ \text{i.e.,}\quad (p+1)\nabla^r \nabla_r u_{i_1\cdots i_p} + (\Delta u)_{i_1\cdots i_p} + (n-2p)(d\rho)_{i_1\cdots i_p} = 0\quad)$$

等は共形 Killing tensor を特徴ずける重要な関係式となる。