研究成果

岩切雅英

主に私は 4 次元球面 S^4 内の閉曲面についてカンドルコサイクル不変量や曲面ブレイドを用いて研究をしています。S^4 内に埋め込まれた閉曲面を曲面絡み目といい、ジェネリックにはめ込まれた閉曲面を特異曲面絡み目といいます。曲面絡み目は特異曲面絡み目です。J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito らによりカンドルホモロジー理論は開発され、その 3 ーコサイクルを用いて定義された曲面絡み目の不変量をカンドルコサイクル不変量といいます。曲面ブレイドは、O. Viro により定義されました。4 次元空間において、古典次元におけるアレクサンダーの定理やマルコフの定理と同様な定理が知られており、曲面ブレイドは曲面絡み目と深く関係しています。また特異曲面絡み目に対しても同様な特異曲面ブレイドが定義されています。また空間グラフやハンドル体絡み目についても研究しています。ハンドル体絡み目とは 3 次元球面 S^3 内のハンドル体のことで、空間グラフで表されます。以下、これまでの私の研究について述べます。文中の番号は、論文リストの番号と一致します。

1. 3 重点解消数. 曲面結び目上の 1 ーハンドル手術は、3 重点解消操作および結び目解消操作であることが F. Hosokawa と A. Kawauchi により知られています。このことから、3 重点解消数が定義できます。私は、[3] において、カンドルコサイクル不変量を利用して 3 重点解消数を下から評価する方法を見つけました。任意の自然数に対して、その数を 3 重点解消数に持つ曲面結び目が存在することもわかりました。

2. w-index. 曲面結び目 F の w-index とは、F と同値な閉じた曲面ブレイドの 3 重点数の最小数です。I. Hasegawa により、すべての連結成分が球面からなる曲面絡み目で、w-index が 6 であるものの存在が知られていました。最近、カンドルコサイクル不変量を用いて、曲面結び目 F の w-index を下から評価する方法を見つけました ([7])。とくに、曲面絡み目 F の次数 3 の 2 面体カンドルの 3 ーコサイクル θ_3 に関するカンドルコサイクル不変量が非自明なとき、F の w-index が少なくとも 6 であることがわかります。p が 3 でない奇素数であるような次数 p の 2 面体カンドルの 3 ーコサイクル θ_p に対して、同様な条件を満たすとき、F の w-index が 7 以上であることもわかりました。また、どの種数に対しても w-index が 6 である曲面絡み目が存在することもわかりました。

3. カンドルコサイクル不変量の計算. 1 次元絡み目 L に対しても、カンドル 3 ーコサイクルを用いた不変量が定義できます。1 次元絡み目 L のツイストスパン結び目のカンドルコサイクル不変量は、L 自身の不変量を用いて計算できます。一般に L の不変量を求めるには、L のダイアグラムにおける 2 重点の符号の情報が必要で、計算が難しいです。私は、位数が奇素数 p の 2 面体カンドルの 3 ーコサイクル θ_p に関する L の不変量は、各 2 重点の符号の情報に注意を払うことなしに計算できることを発見し、その事実を使ってツイストスパン 2 橋結び目やツイストスパンプレッツェル絡み目、ツイストスパントーラス絡み目のカンドルコサイクル不変量を計算しました ([2、4、5])。

4. 空間グラフやハンドル体絡み目のコサイクル不変量. A. Ishii はハンドル体絡み目のライデマイスター変形を決定し、圭による彩色を定義しました。彼は、θ_p に関するハンドル体絡み目の不変量も定義しました。現在、私と A. Ishii により、有限カンドルによるカンドル彩色、新しいホモロジーやコホモロジー、コサイクル不変量を研究しています。我々の不変量は空間グラフに対する不変量でもあります。我々の不変量はハンドル体の鏡像との同値性や空間グラフの非自明性などに役に立つ事もわかります。山田多項式で区別できないある 2 つの空間グラフを区別することもできます。この研究は [8] において紹介しています。

5. 特異曲面ブレイドの crossing change. 横断的な 2 重点を持つことを許した曲面ブレイドのことを特異曲面ブレイドといいます。特異曲面ブレイドの crossing change とは、特異曲面ブレイド上のシートをつなぐコードに添って、正と負の横断的な 2 重点の組を挿入することです。[6] では、crossing change が結び目解消操作であることを示しました。同様な局所変形が特異曲面結び目の結び目解消操作であることは、C. A. Giller により示されています。私の結果を利用するとその Giller の定理も示すことが出来ます。

6. 特異曲面ブレイドの有限型不変量. [1] では、S. Kamada により定義された、曲面結び目の 1 ーハンドル手術に関する有限型不変量と同様に、特異曲面ブレイド上の 1 ーハンドル手術に関する有限型不変量を考えました。その有限型不変量は、2 重点数、オイラー標数、法オイラー数だけで決まることがわかります。また、crossing change に関する有限型不変量も定義して、その不変量が、2 重点数、各成分のシート数、オイラー標数、法オイラー数だけで決まることを示しました (cf. [6])。

7. ブレイド指数 3 以下の特異曲面絡み目. 私は最近、ブレイド指数 2 以下の特異曲面絡み目が自明な特異曲面絡み目であること、ブレイド指数 3 の特異曲面絡み目が特異リボン曲面絡み目であることを示しました (cf. [9])。曲面絡み目に対しては、同様の結果が S. Kamada により知られていました。この結果を得るために、特異曲面絡み目 F の w-index が 0 であることと F が特異リボン曲面絡み目であることが同値である事を示しました。また、ブレイド指数 3 の自明でない特異曲面絡み目の 1-ハンドル手術に関する結び目解消数と crossing change に関する結び目解消数がそれぞれ 1 であることも示しました。